TD n°3 Correction

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

Oscillateur déphaseur⋆

On reconnaît entre A et B l'association d'un suiveur et d'un amplificateur inverseur. On a donc l'égalité (critère de Barkhausen) :

$$\frac{V_A}{V_B} = -\frac{R''}{R'}$$

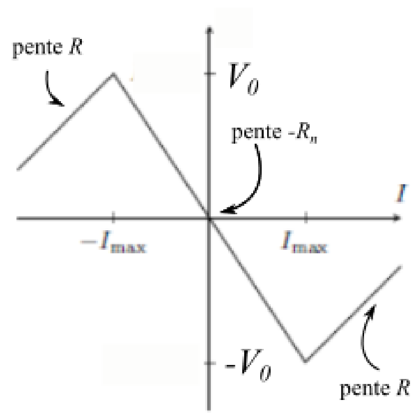
$$1 + 6j\omega\tau - 5\omega^2\tau^2 - j\omega^3\tau^3 = -\frac{R'}{R''} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\omega\tau & = \omega^3\tau^3 \\ 1 - 5\omega^2\tau^2 & = -\frac{R'}{R''} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \omega & = \frac{\sqrt{6}}{RC} \\ R' & = 29R'' \end{cases}}$$

Montage à résistance négative

1. La loi d'Ohm aux bornes de la résistance R s'écrit : $V - V_S = RI$. Par ailleurs, un pont diviseur donne : $V_+ = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_S$ En régime linéaire $V_+ = V_- = V$. On en déduit $V_S = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V \Rightarrow \boxed{V = -\frac{RR_1}{R_2}I}$. Par ailleurs, $\boxed{V_S = -\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{RR_1}{R_2}I}$.
2. Dans le cas saturé, on a plus simplement
   - $\boxed{V = V_{sat} + RI}$ si $V_s = V_{sat}$,
   - $\boxed{V = -V_{sat} + RI}$ si $V_s = -V_{sat}$
3. D'après le résultat de la question 1, le montage se comporte comme une résistance négative de valeur $R_n = -\frac{RR_1}{R_2}$. Cela reste vrai tant que l'ALI fonctionne en régime linéaire c.à.d :

$$-V_{sat} < V_s < V_{sat} \Leftrightarrow -\frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat} < V < \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$$

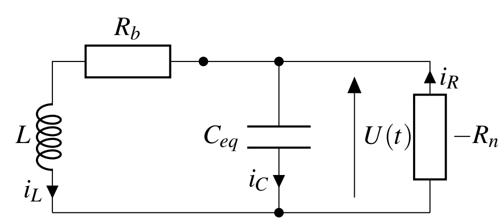
On a donc $\boxed{V_0 = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}}$. La caractéristique aura la forme suivante :



4. On peut utiliser la loi d'association des impédances en parallèle pour répondre à cette question. Sinon, on peut simplement écrire la loi des noeuds pour deux condensateurs en parallèle à la même tension $u(t)$ et parcourus par des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = C_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow i(t) = (C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

5. Considérons le circuit suivant :



Notons i_R, i_C et i_L les courants traversant la bobine, le condensateur équivalent et la résistance négative. On a :

$$\begin{aligned}
i_L(t)+i_C(t)=i_R(t) &\Rightarrow i_L(t)+C_{eq}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{U(t)}{R_n}\\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}(t)+C_{eq}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2}(t)=\frac{1}{R_n}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t)\\
&\Rightarrow \frac{U(t)-R_bi_L(t)}{L}U(t)+C_{eq}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2}(t)=\frac{1}{R_n}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t)\\
&\Rightarrow \frac{U(t)}{L}-\frac{R_b}{L}\left(\frac{U(t)}{R_n}-C_{eq}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t)\right)+C_{eq}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2}(t)=\frac{1}{R_n}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t)
\end{aligned}$$

On en déduit finalement :

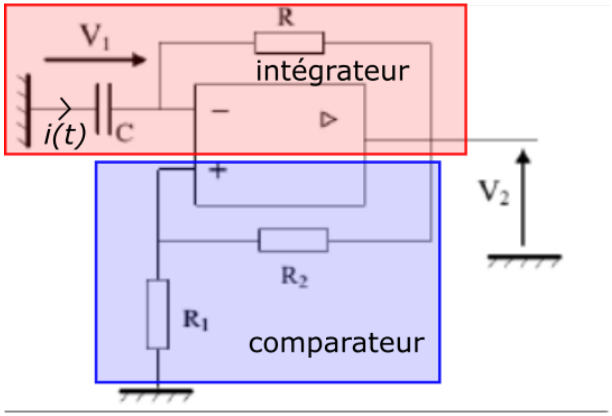
$$\boxed{\frac{1}{LC_{eq}}\left(1-\frac{R_b}{R_n}\right)U(t)+\left(\frac{R_b}{L}-\frac{1}{R_nC_{eq}}\right)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t)+\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2}(t)=0}$$

On a :

$$\begin{cases} a &= 1\\ b &= \dfrac{R_b}{L}-\dfrac{1}{R_nC_{eq}}\\ c &= \dfrac{R_b}{R_n}\end{cases}$$

6. Les solutions sont sinusoïdales si et seulement si $b=0$ et $c<1$ soit $\frac{R_b}{L}=\frac{1}{R_nC_{eq}}$ qui donne $\boxed{R_n=R_bQ^2}$ et $\frac{R_b}{R_n}<1\Rightarrow\boxed{Q>1}$.
7. Pour s'assurer du démarrage des oscillations, il faut qu'au moins un des coefficients de l'équation différentielle soit positif. Si on prend par ailleurs R_n légèrement supérieur à Q^2R_b, on aura $b<0$ ce qui permettra d'assurer le début des oscillations.

Multivibrateur astable◇•



1. C'est un montage très similaire au montage vu en cours mais il est plus compact : il n'utilise qu'un seul A.O.
2. Aux bornes de C et de R, on peut écrire :

   $$i(t)=-C\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}(t),\quad v_1(t)-v_2(t)=Ri(t)$$

   On a donc finalement :

   $$\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{v_1(t)}{RC}=\frac{v_2(t)}{RC}$$

   Supposons que le mode de fonctionnement soit linéaire, on aura, en plus de l'équation précédente :

   $$v_1(t)=\frac{R_1}{R_1+R_2}v_2(t)$$

   En combinant les deux, on obtient :

   $$\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{R_2}{R_1}\frac{v_1(t)}{RC}=0$$

   Le régime est instable. Donc l'A.O fonctionne nécessairement en régime saturé.
3. Le montage fonctionne de la même façon que celui vu en cours. Le condensateur C se charge jusqu'à basculement de l'A.O qui entraîne la décharge du condensateur jusqu'à un certain point, puis l'A.O bascule de nouveau etc...

4. Prenons pour condition initiale :

$$\begin{cases} v_1(t=0) & = v_-(t=0) = 0 \\ v_2(t=0) & = +V_{\text{sat}} \end{cases}$$

$v_1(t)$ est solution de :

$$\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_1(t)}{RC} = \frac{V_{\text{sat}}}{RC}$$

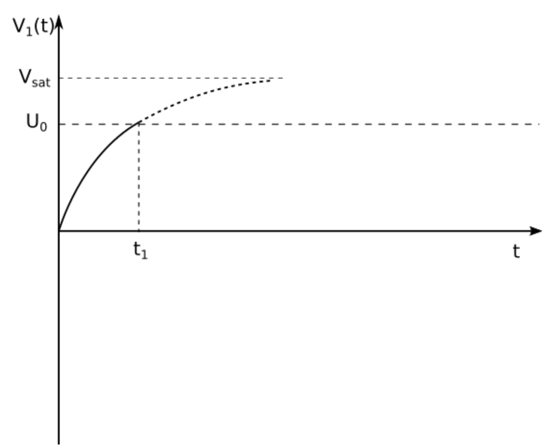
Après résolution, on obtient :

$$v_1(t) = V_{\text{sat}}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})$$

$v_1(t)$décrit une branche d'exponentielle tendant vers $+V_{\text{sat}}$. Cette expression reste valable tant que $\varepsilon > 0$. En utilisant un pont diviseur de tension, cette condition est équivalente à :

$$v_1(t) < U_0$$

avec $U_0 = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_{\text{sat}}$. Le schéma ci-dessous résume la situation :



Quand $v_1(t)$ atteint U_0, l'A.O bascule à $-V_{\text{sat}}$. $v_1(t)$ est alors solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_1(t)}{RC} = -\frac{V_{\text{sat}}}{RC}$$

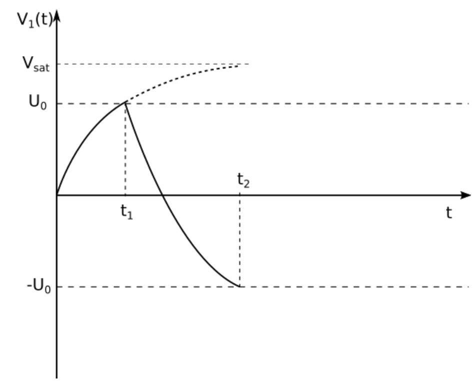
dont la solution s'écrit sous la forme :

$$v_1(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} - V_{\text{sat}}$$

$v_1(t)$ décrit une branche d'exponentielle tendant vers $-V_{\text{sat}}$. Ceci reste valable tant que $\varepsilon < 0$, c.à.d :

$$v_1(t) > -U_0$$

. Quand $v_1(t)$ atteint $-U_0$, l'A.O bascule de nouveau à $+V_{\text{sat}}$ et tout recommence à nouveau.



On souhaite maintenant calculer la période de cette oscillateur. Il faut faire attention car on a des branches d'exponentielles et non plus des segments de droite comme dans l'oscillateur du cours. En particulier, on ne peut pas dire que $T = 4t_1$ où t_1 désigne la date du premier basculement. Par contre, le temps entre deux basculements est bien égal à la moitié de la période. Pour trouver T, on peut donc par exemple calculer le temps que met $v_1(t)$ pour passer de U_0 à $-U_0$ quand $v_2(t) = -V_{\text{sat}}$.

Pour cela, on résout l'équation différentielle vérifiée par $v_1(t)$ avec les nouvelles conditions initiales : $v_1(t=0) = U_0$ et $v_2(t=0) = -V_{\text{sat}}$. On trouve :

$$v_1(t) = \frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} - V_{\text{sat}}$$

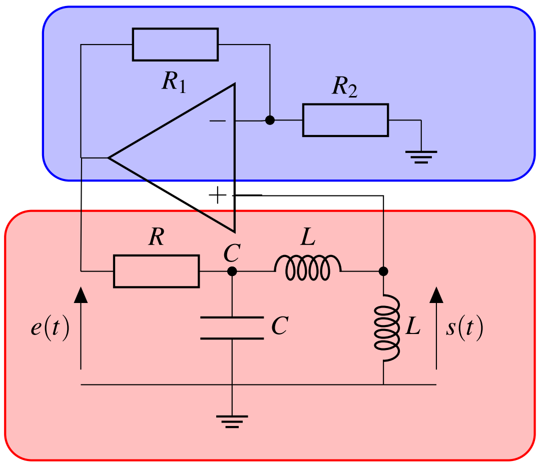
L'A.O bascule quand $v_1(t) = -U_0$. Après calcul, on trouve :

$$t = RC \ln\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right)$$

On en déduit $\boxed{T = 2RC \ln\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right)}$.

Oscillateur Hartley•

On considère le montage de la figure ci-dessous :



1. On reconnaît un amplificateur non inverseur dans la partie haute du montage (en bleu) et un filtre linéaire dans la partie basse. A basse fréquence, les bobines sont équivalentes à des fils. On a donc $s(t)=0$. A haute fréquence, le condensateur est équivalent à un fil et les bobines à des interrupteurs ouverts. La tension de sortie n'est plus liée à l'entrée. Le filtre est un filtre passe-bande.

2. Soit $\underline{u_C}$ la tension aux bornes du condensateur. L'application du pont diviseur de tension donne $\underline{u_C}=2\underline{s}$. Le théorème de Millman au niveau du noeud C donne :

$$\underline{u_C}=\frac{\frac{\underline{e}}{R}+\frac{\underline{s}}{jL\omega}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}+jC\omega}$$

On en déduit :

$$2\underline{s}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}+jC\omega\right)=\frac{\underline{e}}{R}+\frac{\underline{s}}{jL\omega}$$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{\frac{1}{R}}{\frac{2}{R}+\frac{1}{jL\omega}+j2C\omega}$$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{\frac{1}{2}}{1+jRC\omega+\frac{R}{2jL\omega}}$$

3. En repassant en réel, on obtient comme équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}+RC\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{2L}s(t)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

Le montage amplificateur non inverseur impose :

$$s(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}e(t)\Rightarrow e(t)=\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)s(t)$$

En combinant les deux équations, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\right)+RC\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{2L}s(t)=0$$

On obtient des oscillations sinusoïdales si :

$$1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)=0\Rightarrow\boxed{R_1=R_2}$$

Dans ce cas, l'équation différentielle se simplifie en :

$$\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{2CL}s(t)=0$$

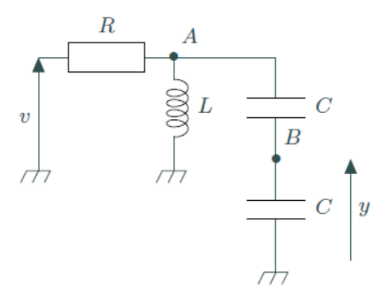
La pulsation des oscillations vaut donc : $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{2CL}}$

4. On a $s(t)=V_{\mathrm{sat}}\cos(\omega_0t+\varphi)$ et $e(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}V_{\mathrm{sat}}\cos(\omega_0t+\varphi)$. En pratique, le critère $R_1=R_2$ n'est pas suffisant pour démarrer les oscillations. On prendra plutôt $R_1>R_2$ afin de se placer en régime instable.

Oscillateur Colpitts•

1. L'A.O ne possède qu'une rétroaction négative, on peut supposer qu'il fonctionne en régime linéaire, où $V_+=u=V_-=\frac{v/(1-x)R'}{1/(1-x)R'+1/xR'}=xv$. D'autre part, en étudiant la portion de droite du circuit :

$$V_A=\frac{\frac{v}{R}+yjC\omega}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}+jC\omega}\text{ et }V_B=\frac{V_A}{2}$$



En combinant ces équations avec $V_B = y$ et $u = xv$, on aboutit à :

$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{2x}}{1 + \frac{R}{jL\omega} + \frac{jRC\omega}{2}}$$

2. En séparant numérateur et dénominateur, on obtient :

$$(1 + \frac{jQ\omega}{\Omega} + \frac{jQ\Omega}{\omega})\underline{y} = H_0\underline{u}$$

En multipliant tout par $\frac{j\omega}{Q\omega}$, puis en repassant en réel, on en déduit :

$$\ddot{y}(t) + \frac{\Omega}{Q}\dot{y}(t) + \Omega^2 y(t) = \frac{H_0\Omega}{Q}u(t)$$

3. En fermant l'interrupteur, on impose $y = u$. On obtient donc :

$$\ddot{y}(t) + \frac{\Omega}{Q}(1 - H_0)\dot{y}(t) + \Omega^2 y(t) = 0$$

Le système est siège d'oscillations sinusoïdales si $H_0 = 1 \Rightarrow x = x_0 = \frac{1}{2}$.

4. Pour obtenir des oscillations, il faut nécessairement que l'on soit en régime instable, donc $1 - H_0 < 0$, soit $x < x_0$. L'instabilité fait que les oscillations sont d'amplitude de plus en plus importante, jusqu'à ce que $v = \pm V_{\text{sat}}$.