

TD n°4 Correction

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

Loi de Laplace

1. On a $V_{Bf} = 0,9\text{L}$ et $V_{Af} = 1,1\text{L}$. En appliquant la loi de Laplace au gaz contenu dans le compartiment B, on obtient $P_{Bf} = 1,16\text{ bar}$. L'équilibre mécanique de la paroi mobile en fin de transformation assure $P_{Af} = 1,16\text{ bar}$.
2. $T_{Bf} = 312\text{K}$
3. En utilisant la loi des gaz parfaits à l'instant initial et à l'instant final, on obtient $T_{Af} = 382\text{K}$.
4. Le premier principe appliqué au système {gaz 1+gaz 2} (transformation isochore) donne :

$$\tau = \frac{1}{RI^2(\gamma - 1)} (P_{Af}V_{Af} - P_{Ai}V_{Ai} + P_{Bf}V_{Bf} - P_{Bi}V_{Bi})$$

5. $W_{A \rightarrow B} = \frac{P_{Bi}V_{Bi}}{\gamma - 1} \left(\frac{T_{Bf}}{T_{Bi}} - 1 \right)$
6. $\Delta S_A = \frac{P_{Ai}V_{Ai}}{T_{Ai}} \left(\frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_{Af}}{T_{Ai}} + \ln \frac{V_{Af}}{V_{Ai}} \right)$

Canette autoréfrigérante

- On étudie le système : {soda+azote}
- Entre l'instant initial (ouverture de la canette) et l'instant final (plus d'azote sous forme liquide), on peut considérer la transformation comme monobare et adiabatique (on néglie les transferts thermiques avec l'extérieur). Le premier principe appliqué au système donne donc : $\Delta H = 0$.
- L'extensivité de l'enthalpie donne :

$$\begin{aligned} \Delta H = 0 &\Rightarrow \Delta H_{\text{soda}} = -\Delta H_{\text{azote}} \\ &\Rightarrow m_{\text{soda}} c \Delta T = -m L_v \\ &\Rightarrow \Delta T = -\frac{m L_v}{m_{\text{soda}} c} = -8,7^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Formation de neige artificielle

1. On considère le système {goutte}. Pendant un petit temps dt , la goutte de rayon R reçoit une petite quantité de chaleur δQ égale à :

$$\delta Q = h(T_a - T(t)) \times 4\pi R^2 \times dt$$

Pendant ce temps, son énergie interne a varié de $dU = mcdT = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho cdT$, où $\rho = 1000\text{ kg.m}^{-3}$ est la masse volumique de l'eau liquide.

Etant donné qu'il n'y a pas de travail des forces de pression (phase condensée), le premier principe appliqué à une goutte entre deux instants t et $t + dt$ donne :

$$dU = \delta Q \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 \rho cdT = 4\pi R^2 h(T_a - T(t))dt \Rightarrow \tau \frac{dT}{dt}(t) + T(t) = T_a$$

avec $\tau = \frac{R\rho c}{3h}$. C'est une équation différentielle du premier ordre.

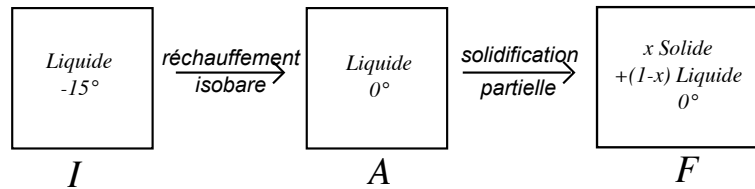
2. En prenant en compte la condition initiale ($T(t = 0) = T_1$), la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$T(t) = (T_1 - T_a)e^{-\frac{t}{\tau}} + T_a$$

Soit t_0 le temps au bout duquel $T(t) = T_F = -5^\circ$. On a :

$$t_0 = \tau \ln \left(\frac{T_1 - T_a}{T_F - T_a} \right) = 3,9\text{s}$$

3. Le système passe de l'état liquide à -5°C à un mélange liquide-solide à 0°C . Pour calculer la variation d'enthalpie, on passera par une étape fictive :



Dans la réalité, ces deux étapes se font de manière simultanée. En supposant la transformation rapide (et donc adiabatique), le premier principe appliqué au système {goutte} donne :

$$\Delta H_{I \rightarrow F} = \Delta H_{I \rightarrow A} + \Delta H_{A \rightarrow F} = mc(T_A - T_I) - x m L_s = 0$$

$$x = \frac{c(T_A - T_I)}{L_s} = \frac{4,18 \times 5}{335} = 0,06$$

6% de la goutte s'est solidifiée pendant cette étape.

Une fois la solidification enclenchée, celle-ci se termine rapidement si le flocon est laissé dans un milieu extérieur de température inférieure à 0°. On peut calculer le temps nécessaire Δt à la solidification totale de la goutte en réappliquant le premier principe :

$$\Delta H = -(1-x)mL_s = h(T_a - T_F)4\pi R^2 \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{(x-1)mL_s}{h(T_a - T_F)4\pi R^2} = \frac{(x-1)RL_s}{3h(T_a - T_F)} = 21,5 \text{ s}$$

Transformation polytropique

1. $dU = \delta W + \delta Q = -PdV + \delta Q \Rightarrow \delta Q = dU + PdV = \frac{nR}{\gamma-1}dT + PdV$. Pour une transformation polytropique, on a par ailleurs :

$$TV^{k-1} = \text{cste} \Rightarrow d(TV^{k-1}) = 0$$

$$\Rightarrow dTV^{k-1} + TV^{k-2}dV = 0 \Rightarrow dV = \frac{VdT}{(k-1)T}$$

En combinant les deux expressions, on obtient le résultat demandé.

2.
 - $k = 0 \Rightarrow P = \text{cste}$, évolution isobare, $C = C_p$,
 - $k = 1 \Rightarrow PV = \text{cste}$, évolution isotherme, $C \rightarrow \infty$ (thermostat),
 - $k = \gamma \Rightarrow PV^\gamma = \text{cste}$, évolution isentropique, $C = 0$,
 - $k \rightarrow \infty \Rightarrow V = \text{cste}$, évolution isochore, $C = C_v$.

Moteur thermique

1. Le premier et le second principe appliqué à la machine sur un cycle de durée supposée infinitésimale donne :

$$\begin{cases} \delta Q_C + \delta Q_F + \delta W = 0 \\ \frac{\delta Q_C}{T_C} + \frac{\delta Q_F}{T_F} = 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, le premier principe appliqué à la source chaude donne : $CdT_C = -\delta Q_C$. De même, pour la source froide $CdT_F = -\delta Q_F$. Le second principe donne donc :

$$\frac{dT_C}{T_C} = -\frac{dT_F}{T_F}$$

qui s'intègre en $T_C T_F = T_1 T_2$.

2. $T_0 = \sqrt{T_1 T_2} = 326 \text{ K}$
3. Calculons les chaleurs échangées : $Q_C = -C \int_{T_1}^{T_0} dT_C = C(T_1 - T_0)$. De même, $Q_F = -C \int_{T_2}^{T_0} dT_F = C(T_2 - T_0)$. En utilisant le premier principe entre la mise en route et l'arrêt du moteur, on en déduit :

$$W_F = -Q_C - Q_F = -C(T_1 + T_2 - 2T_0) = -2400 \text{ kJ}$$

4. On en déduit :

$$\eta = -\frac{W_F}{Q_C} = 1 + \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} = 0,127$$

5. $\eta_0 = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0,236$.

Compresseur avec un gaz réel

Le diagramme Enthalpie-entropie de la vapeur d'eau est mis sur le site cahiers de prépa. Les isothermes sont représentées en rouge et les isobares en bleu.

1. Pour un gaz parfait, si on suppose la transformation isentropique, l'application de la loi de Laplace donne : $T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 446^\circ \text{C}$ (attention à bien indiquer les températures en Kelvin !). D'après le premier principe, on a $w_u = \Delta h$ (travail indiqué = travail utile). Pour un gaz parfait :

$$w_u = c_p \Delta T = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}(T_2 - T_1) = 666 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

2. On lit sur le diagramme une température finale de 450°C . La variation d'enthalpie au cours de cette transformation vaut $\Delta h \approx 3380 - 2780 = 600 \text{ kJ.kg}^{-1}$. C'est aussi la valeur du travail indiqué.

3. La variation d'enthalpie est plutôt de 800 kJ.kg^{-1} . De plus, on voit que l'entropie massique a augmenté. C'est logique : la compression n'étant pas réellement réversible (il y a beaucoup de frottements et de dissipation d'énergie au cours de la compression), il faut fournir un plus grand travail pour comprimer le gaz de 1 bar à 10 bar.

Congélateur

1. A température égale, l'entropie d'un liquide est largement inférieure à l'entropie d'un gaz (nombre de microétats accessibles beaucoup moins importants). On retrouve donc, comme pour un diagramme $P - v$ le liquide à gauche, le mélange liquide-vapeur en dessous de la courbe de saturation et la vapeur à droite de la courbe de saturation.
2. La transformation (1) $\rightarrow$ (2) est isentropique. Pour déterminer T_2 , on peut de nouveau utiliser la loi de Laplace :

$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 265 \times \left(\frac{3}{10} \right)^{\frac{1-1,3}{1,3}} = 350 \text{ K}$$

3. Au cours de la transformation (3) $\rightarrow$ (3'), le liquide saturant passe de la température T_3 à la température T_1 sans changer d'état. On a donc $\Delta h_{(3) \rightarrow (3')} = c_L(T_1 - T_3)$. Au cours de la transformation (3') $\rightarrow$ (4), une fraction x de liquide se vaporise à la température T_1 . On a donc : $\Delta h_{(3') \rightarrow (4)} = x \ell_v$. Sachant que la transformation (3) $\rightarrow$ (4) est isenthalpique d'après l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} \Delta h_{(3) \rightarrow (4)} &= 0 \\ \Delta h_{(3) \rightarrow (3')} + \Delta h_{(3') \rightarrow (4)} &= 0 \\ c_L(T_1 - T_3) + x \ell_v &= 0 \Rightarrow x = -\frac{c_L(T_1 - T_3)}{\ell_v} = 0,15 \end{aligned}$$

4. Une machine frigorifique reçoit de la chaleur de la source froide. Il s'agit de la transformation (4) $\rightarrow$ (1) au cours duquel le système s'évapore (opération endothermique) à la température T_1 . Le système est en contact avec la source chaude lors du refroidissement du gaz et de la liquéfaction. Il s'agit de la transformation de la transformation (2) $\rightarrow$ (3).
5. Au contact de l'évaporateur, le liquide restant du mélange s'évapore. Sachant qu'il y a encore une fraction $(1-x)$ de liquide, le transfert thermique nécessaire vaut :

$$q_{4 \rightarrow 1} = (1-x) \ell_v = 1,1 \text{ MJ.kg}^{-1}$$

6. Le premier principe pour les systèmes en écoulement entre l'entrée et la fin du compresseur donne :

$$h_2 - h_1 = w_C + q_{1 \rightarrow 2}$$

La transformation étant adiabatique, on a $q_{1 \rightarrow 2} = 0$. Par ailleurs, le gaz étant supposé parfait, sa variation d'enthalpie massique entre l'état (1) et l'état (2) vaut :

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = \frac{nR\gamma}{m(\gamma-1)}(T_2 - T_1) = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}(T_2 - T_1)$$

7. L'application du premier principe pour les systèmes en écoulement donne :

$$h_4 - h_3 = w_D + q_{3 \rightarrow 4}$$

La transformation est isenthalpique ($h_4 = h_3$) et adiabatique $q_{3 \rightarrow 4} = 0$. On a donc $w_D = 0$.

8. L'efficacité du congélateur est définie par

$$e = \frac{Q_f}{W} = \frac{q_f}{w} = \frac{q_{4 \rightarrow 1}}{w_C}$$

En remplaçant, on obtient :

$$e = \frac{(1-x)\ell_v}{\frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}(T_2 - T_1)} = \frac{\ell_v + c_L(T_1 - T_3)}{\frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}(T_2 - T_1)} = 6,1$$

9. Dans le cas d'un cycle réversible, l'efficacité de la machine vaut :

$$e_C = -\frac{Q_f}{Q_f + Q_c} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 7,6$$

Résolution de problème

Considérons le système {voiture} au cours d'un arrêt brusque. L'arrêt étant brusque, on néglige les échanges thermiques entre la voiture et l'air extérieur sur cet intervalle de temps. Par ailleurs, les frottements de l'air et les frottements des roues sur le sol sont considérés comme négligeables. Le premier principe appliqué au système entre le début de la phase de freinage et l'arrêt du véhicule donne donc :

$$\Delta(U + E_c) = 0 \Rightarrow \Delta U = -\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

La variation d'énergie interne du véhicule est liée à l'échauffement des disques et des plaquettes de freins au cours du freinage. En supposant que cet échauffement est uniforme, on aura :

$$\Delta U = (m_{\text{disques}}c_{\text{disques}} + m_{\text{plaquettes}}c_{\text{plaquettes}})\Delta T$$

On peut calculer précisément la masse des disques et des plaquettes à l'aide des données de l'énoncé. Ainsi, le volume d'un disque avant *plein* vaut :

$$V_{\text{avant}} = 4\pi(R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2) \times e = 1,35 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

en prenant une épaisseur moyenne de $e \approx 23 \text{ mm}$. La masse d'un disque avant *plein* en fonte vaut donc $m_{\text{avant}} = 10,5 \text{ kg}$. Les disques avant étant généralement ventilés (ils sont plein de trous) pour faciliter la dissipation de la chaleur, leur masse est moins élevée que la valeur calculée ici. On prendra, en cohérence avec l'énoncé, $m_{\text{avant}} = 5 \text{ kg}$. Pour un disque arrière plein, on a $V_{\text{arriere}} = 0,38 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ soit $m_{\text{arriere}} = 3 \text{ kg}$, ce qui est cohérent avec l'énoncé. Enfin, la masse moyenne d'une plaquette de frein vaut $m_{\text{plaquette}} \approx 1 \text{ kg}$. On a donc :

$$(8m_{\text{plaquette}} + 2m_{\text{avant}} + 2m_{\text{arriere}})c_p\Delta T = \frac{1}{2}mv^2$$

soit :

$$\Delta T = \frac{mv^2}{2(8m_{\text{plaquette}} + 2m_{\text{avant}} + 2m_{\text{arriere}})c_p}$$

L'application numérique pour une voiture de 1200kg donne :

$$\Delta T = \frac{1200 \times 36^2}{2 \times 24 \times 0,54 \times 10^3} = 60^\circ \text{C}$$

Ce résultat semble intuitivement faible mais c'est parce qu'on a supposé que la température des disques et des plaquettes était uniforme. Cela n'est pas vrai si la chaleur causée par les frottements n'a pas eu le temps de se diffuser dans toute l'épaisseur des plaquettes et des freins. On peut le vérifier en calculant le temps caractéristique de diffusion de la chaleur dans une épaisseur e qui vaut $\tau = \frac{e^2}{D}$ où $D = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ est le coefficient de diffusivité thermique¹. Pour les disques avant, on trouve $\tau \approx 41 \text{ s}$, pour les disques arrières $\tau \approx 4 \text{ s}$ et pour les plaquettes $\tau \approx 25 \text{ s}$. Donc, au cours d'un arrêt d'urgence, la température dans les disques et les plaquettes n'est pas uniforme et la température au niveau du contact plaquette-disque est probablement

beaucoup plus élevée que 60° .

L'effort de freinage ayant lieu surtout sur les roues avant plutôt que sur les roues arrières, il faut que les disques avant soient plus gros que les disques arrières. Pour éviter un échauffement trop important, on utilise des disques creux pour mieux dissiper la chaleur. Pour des raisons de coût, on utilise des disques pleins à l'arrière.

1. Cf. cours sur la diffusion thermique.