Opérateur divergence

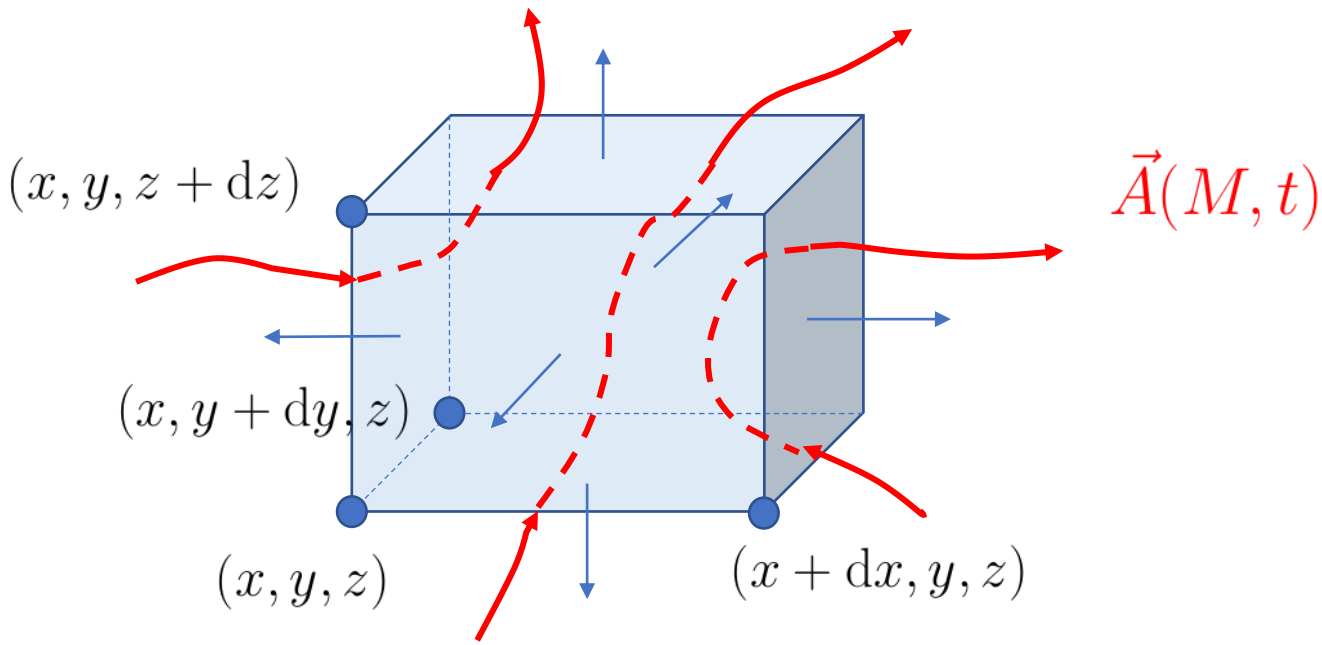
- **Divergence** (définition Larousse)
  - Situation de deux lignes, de deux rayons qui vont en s'écartant.
  - Différence, désaccord entre les opinions, les intérêts des personnes, des groupes
  - **Géographie:** Sur un plan horizontal, écartement vers l'extérieur (par rapport à une région donnée) d'un flux d'air ou d'un courant marin.
  - **Mathématiques:** Fonction **scalaire** qui, au champ du **vecteur** $\vec{A}(M,t)$ associe la valeur:

$$\mathrm{div}\vec{A}(M,t) = \frac{\partial A_x(M,t)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(M,t)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(M,t)}{\partial z}$$

Quel sens donner à cette expression… compliquée?

Interprétation

Considérons un volume élémentaire $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ situé en $M = (x, y, z)$



On oriente tous les vecteurs surface vers l'extérieur

On veut exprimer le flux total **sortant** d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à travers $\mathrm{d}V$

Rappel sur les flux

- Le flux d'un vecteur $\vec{A}$ (par exemple la vitesse) à travers une surface élémentaire orientée $\mathrm{d}\vec{S}$ vaut:

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

- Le flux à travers une surface macroscopique vaut:

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Rappel:

Flux total sortant du volume élémentaire

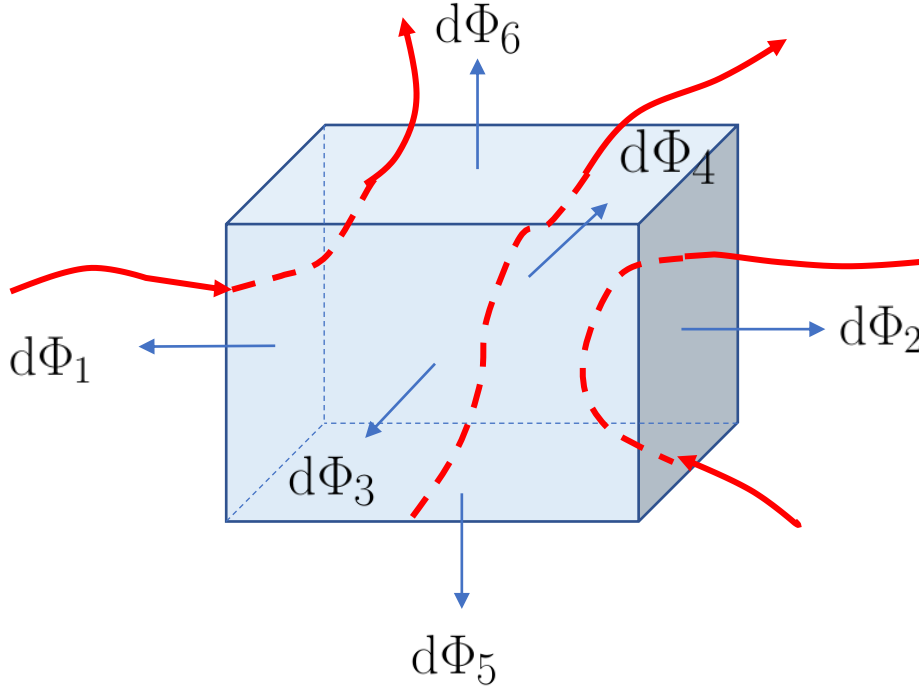
$$d\Phi_{tot} = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3 + d\Phi_4 + d\Phi_5 + d\Phi_6$$

avec:

$d\Phi_1 =$

$d\Phi_2 =$

$d\Phi_3 = \ldots$



D'où:
$$\begin{aligned} d\Phi_{tot} = & -A_x(x,y,z)dydz + A_x(x+dx,y,z)dydz \\ & - A_y(x,y,z)dxdz + A_y(x,y+dy,z)dxdz \\ & - A_z(x,y,z)dydz + A_z(x,y,z+dz)dxdy \end{aligned}$$

On reconnaît:
$$\begin{aligned} d\Phi_{tot} &= \frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial A_y}{\partial y}dydxdz + \frac{\partial A_z}{\partial z}dzdxdy \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV \\ &= \mathrm{div}\vec{A}\, dV \end{aligned}$$

- La divergence d'un vecteur en un point M mesure le flux sortant de ce vecteur au point M par unité de volume.

$$\mathrm{div}\vec{A}(M,t) = \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{tot}}(M,t)}{\mathrm{d}V}$$

Si $\mathrm{div}\vec{A}(M,t) > 0$: le champ diverge au point M,

Si $\mathrm{div}\vec{A}(M,t) < 0$: le champ converge au point M,

Si $\mathrm{div}\vec{A}(M,t) = 0$: le champ ne converge ni ne diverge en M.

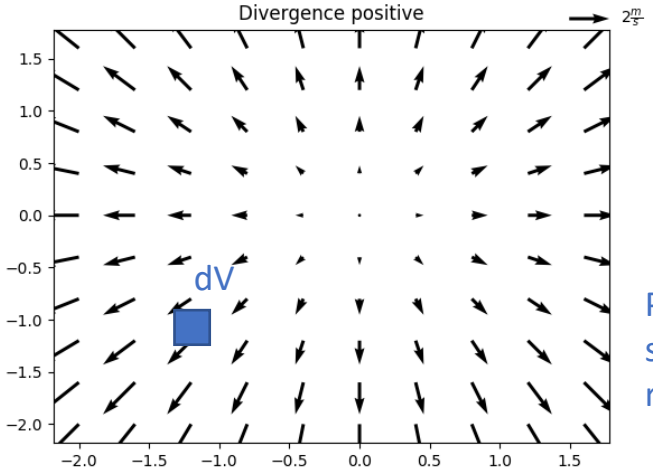
- Exemple du vecteur vitesse:

$$\mathrm{div}\vec{v}(M,t) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{D}_v}{\mathrm{d}V}$$

$\mathrm{div}\vec{v}(M,t) > 0$ — Du fluide sort du volume élémentaire en *M*: il se dilate en *M*

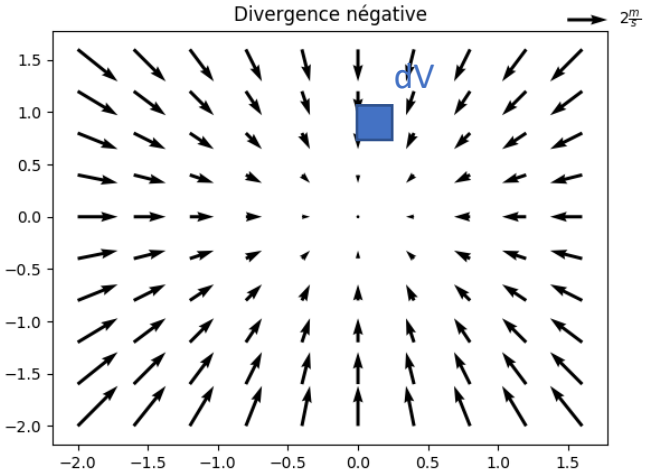
$\mathrm{div}\vec{v}(M,t) < 0$ — Du fluide rentre du volume élémentaire en M: il se comprime en *M*

$\mathrm{div}\vec{v}(M,t) = 0$ — Le fluide ne se comprime ni se dilate



Plus de fluide sort de dV qu'il n'en rentre

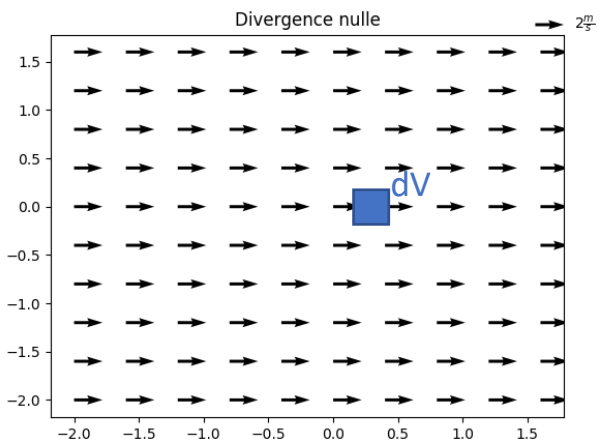
Champ de divergence positive
présence d'une « source »

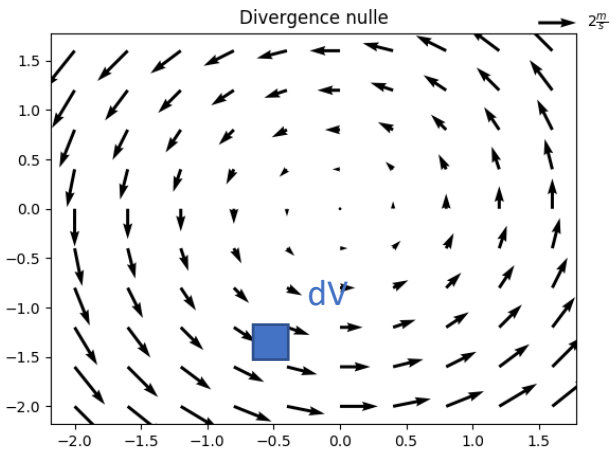


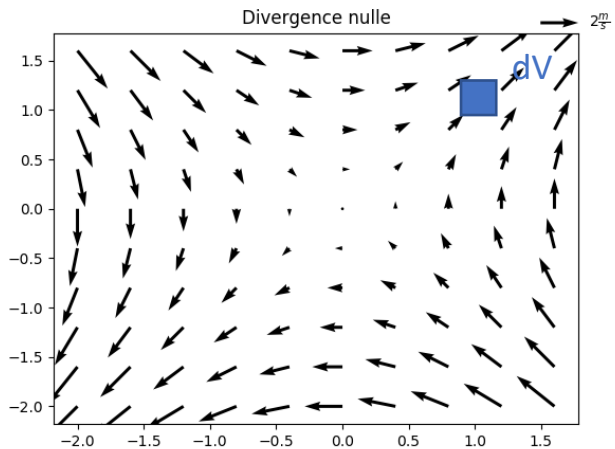
Plus de fluide rentre de dV qu'il n'en sort

Champ de divergence négative
présence d'un « puit »

Champs de divergence nulle





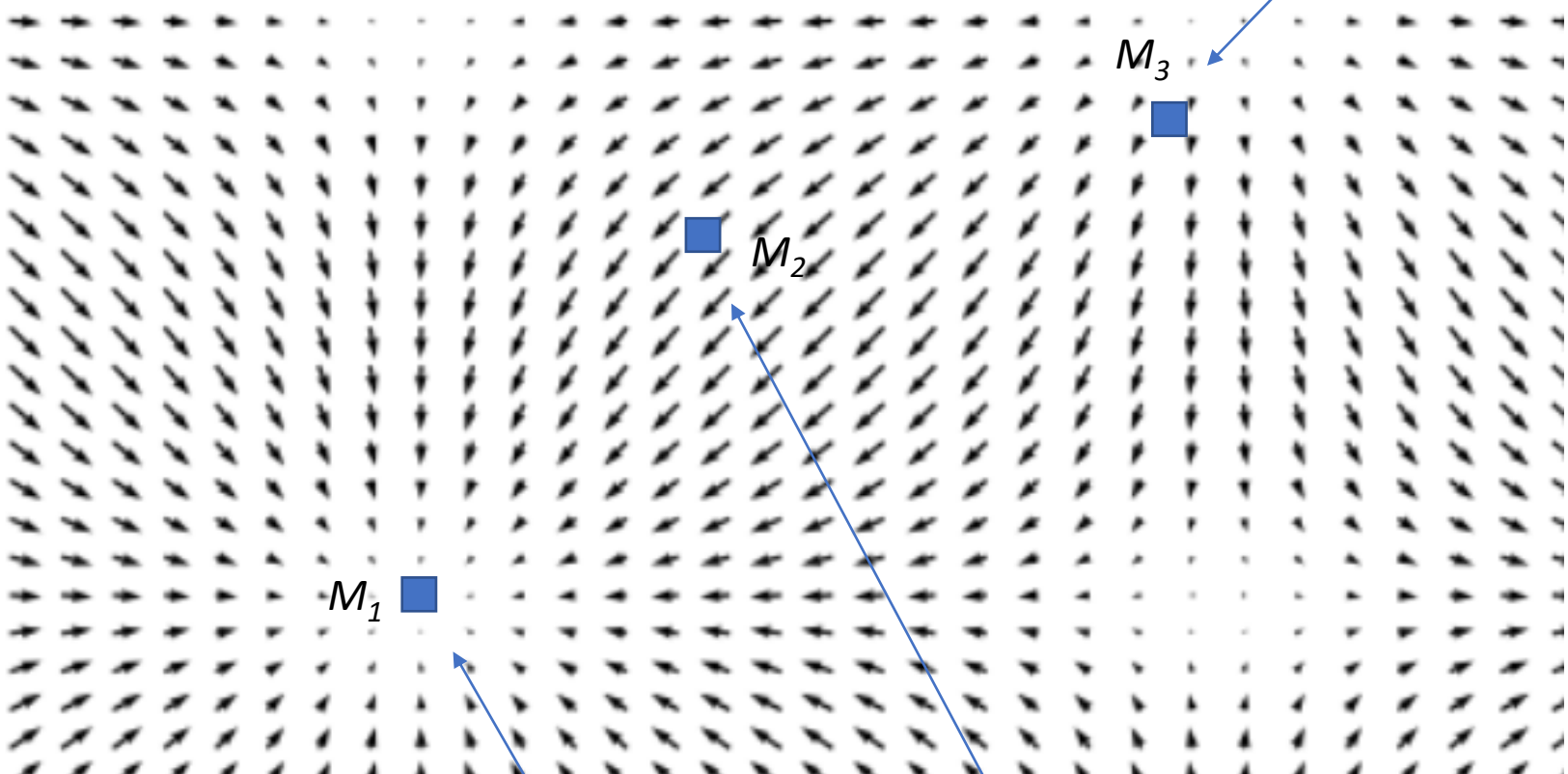


Autant de fluide sort de dV qu'il n'en rentre

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from numpy import ma

X, Y = np.meshgrid(np.arange(-2, 2, .4), np.arange(-2, 2, .4))
U = -Y
V = X
plt.figure()
plt.title('Divergence nulle')
Q = plt.quiver(X, Y, U, V,units='width')
qk = plt.quiverkey(Q, 0.9, 0.9, 2, r'$2 \frac{m}{s}$', labelpos='E',
                   coordinates='figure')
plt.savefig('divergence_nul.png')
```

Bien sûr, la divergence n'est pas nécessairement constante.



Expression de la divergence pour les autres systèmes de coordonnées (fournie)

- Coordonnées cylindriques

Si $\vec{A} = A_r(r,\theta,z)\vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,z)\vec{u}_\theta + A_z(r,\theta,z)\vec{u}_z$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

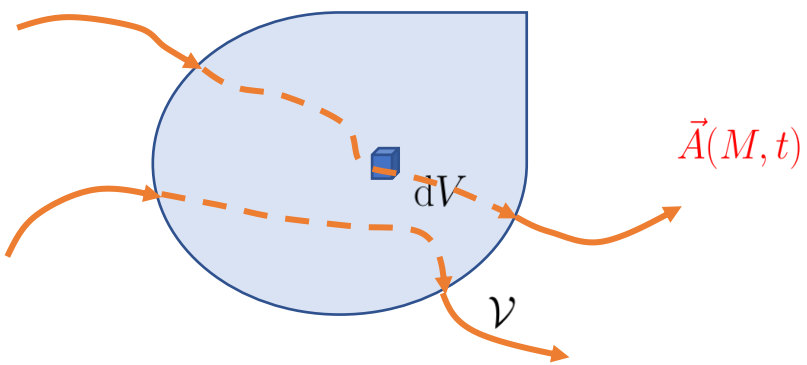
- Coordonnées sphériques

Si $\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\varphi$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial(\sin\varphi A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

Théorème de Green-Ostrogradski

- Considérons un volume *V* macroscopique. On le découpe en petits volumes *dV*.



- Le flux de $\vec{A}$ sortant de chaque petit élément *dV* vaut: $\mathrm{d}\Phi = \mathrm{div}\vec{A}\mathrm{d}V$
- Le flux de $\vec{A}$ sortant de la surface fermée S_c délimitant V est la somme de tous ces flux:

$$\Phi_{\mathrm{sortant}} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{A}\mathrm{d}V$$

- On en déduit le théorème de Green-Ostrogradski:

$$\oiint_{S_c} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{A}\mathrm{d}V$$

Résumé

- L'opérateur divergence agit sur un **vecteur** et renvoie un **scalaire**.

- En cartésien, l'expression de la divergence vaut:

$$\mathrm{div}\vec{A}(M,t) = \frac{\partial A_x(M,t)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(M,t)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(M,t)}{\partial z}$$

- La dimension de $\mathrm{div}\vec{A}$ est la dimension de $\vec{A}$ divisée par des mètres.

- $\mathrm{div}\vec{A}(M,t)$ mesure le flux de $\vec{A}$ sortant d'un petit volume situé au point M.

- Le flux de $\vec{A}$ à travers une surface fermée est égale à l'intégrale sur le volume de la divergence de $\vec{A}$

$$\oiint_{S_c} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{A}\mathrm{d}V$$