Correction DM n°2

PSI 2022/2023

I Réfrigérateur domestique

I.1 Modélisation d'une machine réfrigérante

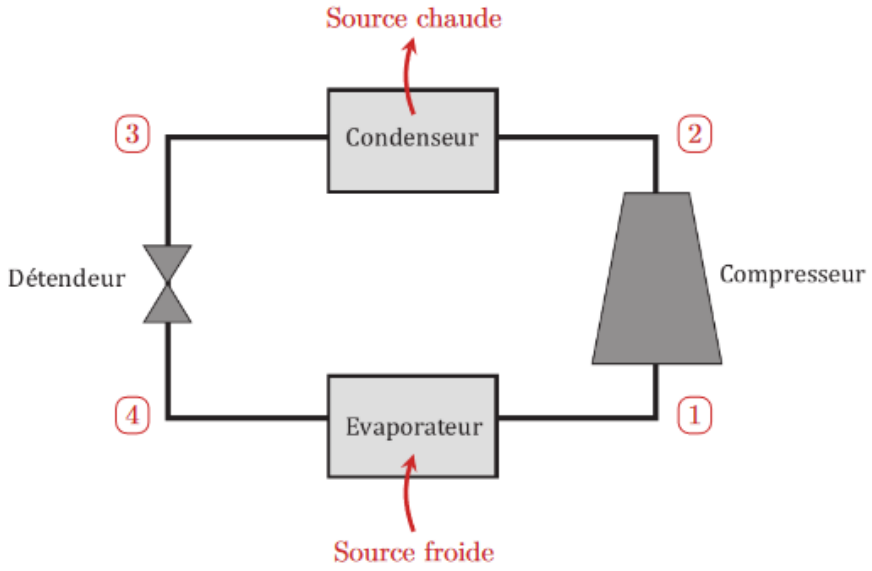
1. $Q_f > 0$ (le système prend de la chaleur à la source froide), $W > 0$ (le système a besoin de travail pour fonctionner), $Q_c < 0$ (le système dégage de la chaleur vers l'extérieur).

2. $e_f = \frac{Q_f}{W}$. On démontre que :

$$e_f = \frac{-Q_f}{Q_f + Q_c} = -\frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}}$$

Or, d'après le second principe : $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0 \Rightarrow \frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f} \leq 0$. On en déduit : $\boxed{e_f \leq \frac{T_f}{T_c - T_f}}$.

3. La figure complétée est :



I.2 Etude d'un cycle réfrigérant à compression de vapeur

I.2.1 Cycle avec compression réversible

4. Pour construire le cycle, on repèrera les isothermes à 0°C et à 40°C correspondants aux changement d'état. On rappelle qu'un changement d'état se fait à température et à pression constante. L'évaporation se fait donc à $P = 3$ bar et la condensation à $P = 10$ bar. On en déduit les coordonnées du point 1 ($T = 10$°C, $P = 3$ bar) et celles du point 3 ($T = 30$°C, $P = 10$ bar) (*on rappelle*

que dans le domaine du liquide, les isothermes sont verticales). Le point 2 est situé à l'intersection de l'isobare $P = 10$bar et de l'isentropique partant de 1. Le point 4 est situé au croisement de l'isobare $P = 3$bar et de l'isenthalpique partant de 4. Le cycle est dessiné sur la figure en fin de corrigé.

5. Le tableau complété est :

Point	1	2s	2	3	4	1'	2'
P (bar)	2,9	10	10	10	2,9	1,3	10
T (°C)	10	53	58	30	0	0	80
État du fluide	v.sèche	v.sèche	v.sèche	liq	diphasé	v.sèche	v.sèche
h ($\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$)	407	432	440	242	242	402	465

6. L'évaporation étant endothermique, la chaleur doit aller de la source froide vers le fluide. Il faut donc nécessairement que $T_f \geq T_{\text{evap}}$. De la même façon, la condensation étant exothermique et se faisant au contact de la source chaude, celle-ci doit être plus froide que le système soit $T_c \leq T_{\text{cond}}$.

7. Cette question était pour les 5/2, la réponse étant étudiée la semaine prochaine ! Pour supposer l'écoulement comme isobare dans les échangeurs, il faut supposer qu'il n'y a aucune perte de charge : l'écoulement est donc supposé parfait.

8. Pour un gaz parfait, l'enthalpie h varie proportionnellement à T. L'inverse est vrai aussi. De ce fait, les isothermes devraient être verticales. Ce n'est pas le cas dans la partie du diagramme liant le point 1 au point 2. On ne pourra donc assimiler le fluide à un GP.

I.2.2 Cycle avec compression non réversible

9. D'après la définition du rendement isentropique :

$$h_2 - h_1 = \frac{h_{2s} - h_1}{\eta}$$

Numériquement, on trouve $\boxed{h_2 - h_1 = 33\mathrm{kJ.kg^{-1}}}$, ce qui donne $\boxed{h_2 = 440\mathrm{kJ.kg^{-1}}}$. Le cycle est tracé en violet sur les figures des dernières pages.

10. Voir le tableau à la question 5.

11. Voir la figure de la dernière page.

12. La compression n'étant pas réversible **et étant adiabatique** (à préciser obligatoirement sinon la réponse est incomplète), on a d'après le second principe $\boxed{s_2 - s_1 = s_c \geq 0}$.

I.2.3 Détermination de l'efficacité de la machine

13. Le premier principe industriel, appliqué à un fluide en écoulement au travers d'un composant thermodynamique s'écrit :

$$\boxed{\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q}$$

14. On a vu d'après le tableau précédent que les variations d'enthalpie sont de l'ordre de la dizaine de $\mathrm{kJ.kg^{-1}}$ au minimum. En comparaison, en prenant une hauteur de $\Delta z = 1,8$m pour un frigo américain, la variation d'énergie potentielle massique vaut $g\Delta z = 17\mathrm{J.kg^{-1}}$. C'est mille fois plus petit et donc totalement négligeable.

15. D'après l'expression vue en cours mardi après-midi, si la vitesse est uniforme sur une section droite, alors on a : $\boxed{\mathcal{D} = \rho V S = \dfrac{SV}{v}}$.

16. Le volume massique est maximal lorsque le fluide est à l'état gazeux, donc à l'état 1 ou 2. En assimilant le gaz à un gaz parfait , on aurait d'après l'équation d'état appliqué à une masse$m$ de gaz :

$$v = \frac{RT}{PM} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2 P_1}{T1 P_2} = \frac{320}{283} \times \frac{3}{10} < 1$$

Même si le gaz n'est pas parfait, on peut néanmoins en conclure que le volume massique est très probablement maximal au point 1.

17. L'application numérique donne : $\boxed{V = 7\text{m.s}^{-1}}$.

18. Si le fluide passait d'une vitesse nulle (cas extrême !) à la vitesse V_{max}, on aurait :

$$\boxed{\Delta e_c = \frac{V_{max}^2}{2} \approx 25\text{J.kg}^{-1}}$$

Cette variation est très négligeable devant les variations d'enthalpie du fluide.

19. L'efficacité de la machine vaut :

$$e_f = \frac{q_f}{w}$$

En appliquant le premier principe pour les systèmes ouverts au fluide traversant l'évaporateur et le compresseur, on en déduit :

$$\boxed{e_f = \frac{q_f}{w} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}}$$

20. En utilisant les donnée du tableau ou le graphique, on en déduit $\boxed{e_f = 5}$.

21. En multipliant les grandeurs massiques par le débit massique, on obtient les puissances suivantes : $\boxed{\mathcal{P}_{th}^f = q_f \times \mathcal{D} = 1,65\text{kW}}$ et $\boxed{\mathcal{P} = w \times \mathcal{D} = 330\text{W}}$

22. Un compresseur ne peut aspirer que de la vapeur sèche, sous peine d'être endommagé. La surchauffe permet de garantir qu'il n'y a plus du tout de liquide dans l'état 1, y compris en cas de petite perturbation du cycle.

23. On sous-refroidit le liquide afin de déplacer les points 3 et 4 au maximum vers la gauche sur le diagramme. Ceci permet de diminuer h_4 et donc d'augmenter le rendement. Il serait avantageux de baisser encore plus la température du liquide mais cela n'est pas nécessairement facile, la température de la cuisine étant généralement situé autour de 20°C. Il faudrait augmenter la surface de contact entre le système et l'air extérieur dans l'échangeur, ce qui signifie augmenter la taille du condenseur.

I.3 Association réfrigérateur-congélateur

24. Voir figure 3 de l'avant dernière page. On repère que l'évaporation à -20°C se fait à une pression $P \approx 1,5$ bar. Le point $1'$ est donc situé à l'intersection de l'isobare $P = 1,5$ bar et de l'isotherme $T = 0$°C. L'égalité des transferts thermiques entre 4 et $4'$ d'une part et $4''$ et $1'$ d'autre part implique que :

$$h_{1'} - h_{4''} = h_{4'} - h_4$$

L'abscisse des points $4'$ et $4''$ doit donc être située au milieu des abscisses du point 4 et du point 1.

25. Voir figure 3.

26. En raisonnant le long d'une isobare, plus le point est proportionnellement proche de la courbe de rosée, plus le titre en vapeur y est élevé. On constate sur la figure 3 que le point $4''$ est plus proche de la courbe de rosée que le point $4'$. On en déduit que le mélange diphasé comporte davantage de vapeur au point $4''$ qu'au point $4'$.

27. Le travail reçu par le fluide dans le compresseur vaut maintenant $w = h_{2'} - h_{1'} = 65$ kJ.kg^{-1}. Le transfert thermique reçu de la source froide vaut $q_f = h_{1'} - h_4 = 160$ kJ.kg^{-1}. D'où une efficacité de $\boxed{e_f = 2,5}$. L'efficacité est nettement plus faible.

I.4 Utilisation du réfrigérateur

I.4.1 Evaluation des fuites thermiques

28. La cuisine étant plus chaude que le réfrigérateur, celui-ci reçoit réellement de l'énergie de la part de la cuisine on a $P_{th} > 0$. Sachant que $T_c > T$, on en déduit $\boxed{\lambda > 0}$.

29. Le premier principe infinitésimal appliqué à {l'air du réfrigérateur} donne :

$$\mathrm{d}H = C\mathrm{d}T = \lambda(T_c - T)\mathrm{d}t \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{C}T(t) = \frac{\lambda}{C}T_c}$$

30. On résout cette équation différentielle classiquement en tenant compte de la condition initiale. On trouve :

$$\boxed{T_(t) = (T_f - T_c)\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{C}t} + T_c}$$

31. La température T_f est la condition initiale, donc $\boxed{T_f = T(t=0) = 277\mathrm{K}}$. La température T_c est la solution particulière, atteinte au bout d'un temps " infini", donc $\boxed{T_c = \lim_{t\to\infty} T(t) = 293\mathrm{K}}$.

32. En reprenant la solution de l'équation différentielle, on trouve :

$$\ln\left(\frac{T - T_c}{T_f - T_c}\right) = -\frac{\lambda}{C}t$$

Le coefficient directeur de la courbe vaut donc $\frac{\lambda}{C}$. On en déduit $\boxed{\lambda = 2,9.10^4\mathrm{J.h^{-1}.K^{-1}} = 8\mathrm{W.K^{-1}}}$.

I.4.2 Fonctionnement en régime stationnaire

33. L'efficacité est supposée correpondre à 25 % de l'efficacité de Carnot calculée à la question 2, d'où :

$$\boxed{e_f = 0,25 \times \frac{T_f}{T_c - T_f} = 4,3}$$

34. La puissance des fuites vaut :

$$\boxed{P_{th} = \lambda(T_c - T_f) = 130\mathrm{W}}$$

35. Etant donné que seul le compresseur fournit de la puissance dans la machine, c'est à lui de compenser l'intégralité des pertes.

I.4.3 Mise en route du réfrigérateur

36. Le premier principe infinitésimal appliqué à {l'air du réfrigérateur} donne :

$$\mathrm{d}H = C\mathrm{d}T = -P_f + P_{th} \Rightarrow C\mathrm{d}T = -\eta P_c + \lambda(T_c - T) = -0,25\frac{T}{T_c - T}P_c + \lambda(T_c - T)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{P_c}{4C}\frac{T}{T_c - T} + \frac{\lambda}{C}(T_c - T)}$$

37. En l'absence de fuites, $\lambda = 0$. On résout alors l'équation en séparant les variables :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{P_c}{4C}\frac{T}{T_c - T} \Rightarrow \frac{T_c - T}{T}\mathrm{d}T = -\frac{P_c}{4C}\mathrm{d}t \Rightarrow T_c \ln(T) - T = -\frac{P_c}{4C}t + \text{cste}$$

On détermine la constante avec la condition initiale pour en déduire :

$$\boxed{t_f = \frac{4C}{P_c}\left(T_f - T_c - T_c \ln\frac{T_f}{T_c}\right)}$$

38. La température atteinte du bout de cinq heures vaut 280 K au lieu de 277 K : la température décroît plus lentement en présence de fuites thermiques, ce qui est normal.

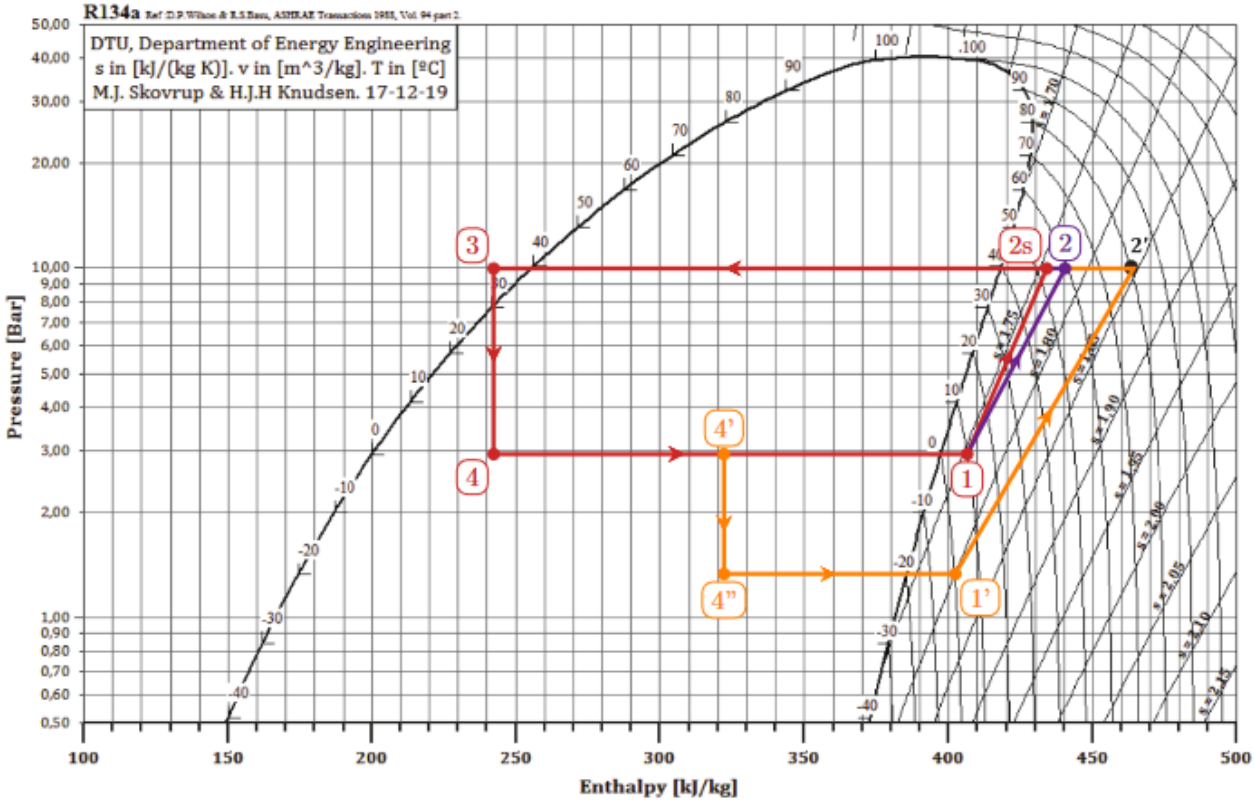


Figure 3 – Diagramme des frigoristes du R134a. Rouge : cycle avec compression réversible (Q4). Violet : cycle avec compression irréversible (Q9). Orange : cycle avec congélateur (Q25).

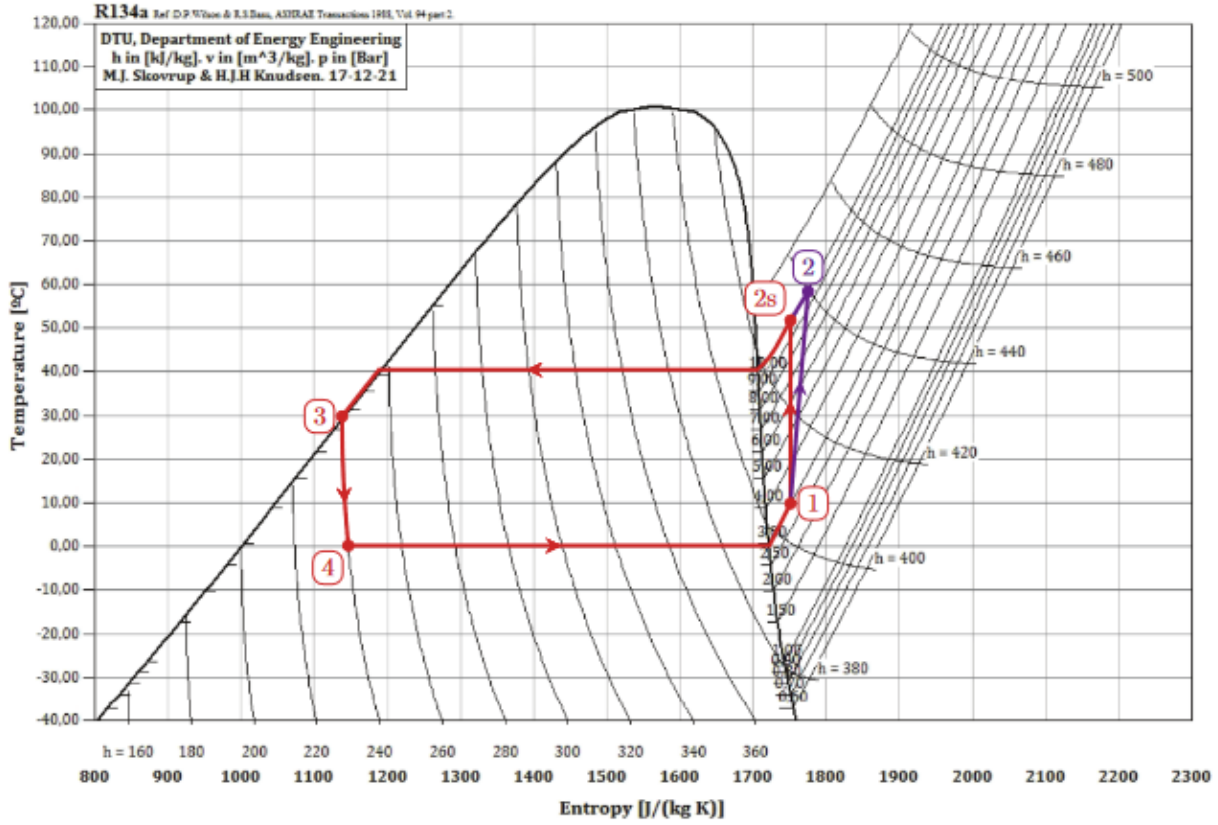


Figure 4 – Diagramme entropique du R134a. Rouge : cycle avec compression réversible (Q4). Violet : cycle avec compression irréversible (Q9).