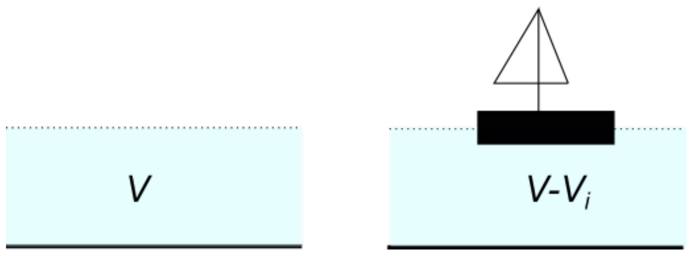
Correction TD n° 6

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆ Exercice à maitriser absolument: il fait intervenir les compétences fondamentales.
• Exercice technique nécessitant des calculs.
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Bateau sur un pont

Il y a deux façons de répondre à cette question : l'une en considérant la masse supportée par le pont, l'autre en considérant les forces de pression s'exerçant sur le pont.



Argument 1 Sans bateau, une longueur L de pont doit supporter un volume V d'eau, soit une masse $\rho_e V$ d'eau. Avec bateau, le pont doit supporter une masse$(V-V_i)\rho_e$ d'eau, oé V_i est le volume immergé du bateau, plus la masse m du bateau. Le bateau étant en équilibre hydrostatique, on a $m=\rho_e V_i$. Le pont supporte donc toujours le méme masse. Il n'a pas plus de chance de s'effondrer lorsqu'un bateau passe.

Argument 2 Les forces exercées sur le pont sont les forces de pression exercées par l'eau au niveau du fond. La profondeur du canal ne variant pas lorsqu'un bateau passe, la pression de l'eau reste constante et les forces de pression ne varient pas. CQFD !

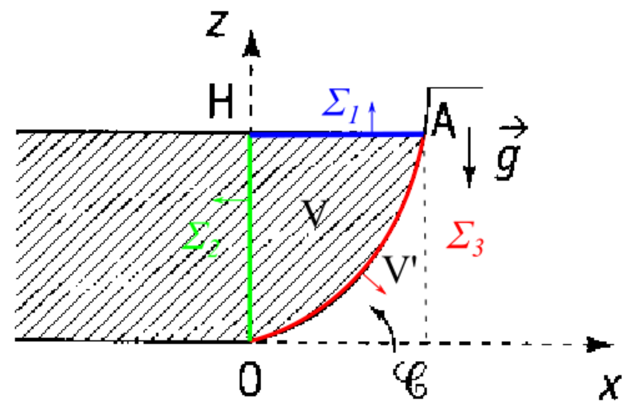
Forces de pression sur un barrage

1. Même démarche que dans le cours :

$$F_p = P_0 HL + \frac{1}{2}\rho_0 g H^2 L$$

Note : on remarque que $F_p = <P> S$ où $<P>$ est la moyenne de la pression exercée sur le barrage et S est la surface du barrage.

2. La surface à considérer n'est pas plane. Pour calculer la force de pression, on se ramène donc à une surface fermée comme ci-dessous :



Mais attention, la pression n'étant pas uniforme, la somme des forces de pression sur toute cette surface fermée n'est plus nulle, elle est égale à la poussée d'Archimède :

$$-\oiint P(M)\mathrm{d}\vec{S} = \mu V g \vec{u}_z$$

où V désigne le volume intérieur à cette surface. On découpe ensuite l'intégrale en trois :

$$-\oiint P(M)\mathrm{d}\vec{S} = -\iint_{\Sigma_1} P(M)\mathrm{d}\vec{S} - \iint_{\Sigma_2} P(M)\mathrm{d}\vec{S} - \vec{F}_{\text{eau}\to\text{barrage}}$$

Les deux premières intégrales sont simples à calculer :

$$-\iint_{\Sigma_1} P(M)\mathrm{d}\vec{S} = -P_0 x_A L \vec{u}_z$$

où x_A dénote l'abscisse du point A.

$$-\iint_{\Sigma_2} P(M)\mathrm{d}\vec{S} = (P_0 HL + \frac{1}{2}\rho_0 g H^2 L)\vec{u}_x$$

On en déduit :

$$\vec{F}_{\text{eau}\to\text{barrage}} = (P_0 HL + \frac{1}{2}\rho_0 g H^2 L)\vec{u}_x - (P_0 x_A L + \mu V g)\vec{u}_z$$

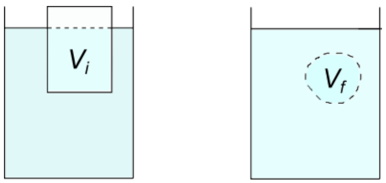
L'équation du barrage nous sert à exprimer le volume V. Sachant que $z(x) = H\frac{x^2}{x_A^2}$ (et non $z = x^2$ comme dit dans l'énoncé), on a :

$$V = HLx_A - V' = Hx_A - L\int_0^{x_A} z(x)\mathrm{d}x = HLx_A - HL\frac{x_A}{3} = \frac{2}{3}HLx_A$$

On obtient donc :

$$\vec{F}_{\text{eau}\to\text{barrage}} = (P_0 HL + \frac{1}{2}\rho_0 g H^2 L)\vec{u}_x - (P_0 x_A L + \mu g \frac{2}{3}HLx_A)\vec{u}_z$$

Questions classiques sur la poussée d'Archimède



1. Le glaçon étant à l'équilibre, son poids est contrebalancé par la poussée d'Archimède. On a donc :

$$\rho_g V = \rho_l V_i$$

où ρ_g est la masse volumique de la glace et ρ_l la masse volumique de l'eau liquide. Le pourcentage de volume immergé par rapport au volume total vaut :

$$\frac{V_i}{V} = \frac{\rho_g}{\rho} \approx 0,9.$$

90% de la glace est immergée.

2. Lorsqu'il a fondu, le glaçon occupe un volume V_f dans le verre. La conservation de la masse du glaçon pendant le changement d'état impose que :

$$\rho_g V = \rho_e V_f$$

Etant donné qu'on a $V_f = V_i$, le niveau de l'eau ne change pas lorsque le glaçon fond [1].

Si on remplace l'eau par du whisky, on a alors $\rho_{\text{wh}} V_i = \rho_{\text{eau}} V_f$. Etant donné que le whisky est moins dense que l'eau (mélange eau+ alcool), le volume immergé est plus grand que le volume V_f. Le niveau du verre baissera.

Pression au sommet de l'Everest

1. L'évolution de la température s'écrit : $T(z) = T_0 - az$ avec $a = \frac{60}{8850} = 6,78.10^{-3}$ K.m^{-1}.
2. On part de la relation de la statique des fluides avec l'axe (Oz) dirigé vers le haut :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(z) = -\rho(z)g = -\frac{P(z)Mg}{R(T_0 - az)}$$

On effectue ensuite une séparation des variables, comme en cinétique chimique :

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{Mg\mathrm{d}z}{R(T_0 - az)}$$

En intégrant entre l'altitude nulle et l'altitude z, on obtient :

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{Mg}{R}\int_{z=0}^{z} \frac{\mathrm{d}z}{T_0 - az} \Leftrightarrow \ln\frac{P(z)}{P_0} = \frac{Mg}{Ra}\ln\frac{T_0 - az}{T_0}$$
$$\Leftrightarrow P(z) = P_0\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Ra}}$$

3. Notons $\alpha = \frac{Mg}{Ra}$. La relation précédente s'écrit : $P(z) = P_0\left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow P(z)T(z)^{-\alpha} = P_0 T_0^{-\alpha}$. En utilisant la loi des gaz parfaits, on en déduit que $P(z)V(z)^k = \text{cste}$ avec $\boxed{k = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = 1,25}$.

1. Pour la même raison, la fonte des glaces de l'artique ne modifiera pas fondamentalement le niveau des océans

Montgolfière

1. La loi des gaz parfaits donne : $\rho = \frac{PM}{RT}$. A $T = 75°\text{C}$, $\rho_c = 1{,}015$ kg.m^{-3}. A $T = 17°\text{C}$, $\rho_f = 1{,}218$ kg.m^{-3}.
2. Le poids de la montgolfière vaut $\vec{P} = (m + \rho_c V)\vec{g}$. La poussée d'Archimède vaut : $\vec{\Pi} = -\rho_f V \vec{g}$ La montgolfière se soulèvera si la poussée d'Archimède est supérieure au poids de la montgolfière :

$$m + \rho_c V < \rho_f V \Rightarrow m < (\rho_f - \rho_c)V \Rightarrow \boxed{m < 1015\text{kg}}$$

3. Calculons la masse volumique de l'hélium à 17°C : $\rho_{\text{Hg}} = 0,168\text{kg.m}^{-3}$. Dans ce cas, $m < (\rho_f - \rho_{\text{Hg}})V \Rightarrow m < 5250\text{kg}$.

Résolution de problème : masse de l'atmosphère

1. La façon la plus directe est simplement d'écrire que le poids total de l'atmposhère est égal à la force de pression exercée par l'air au niveau du sol. On en déduit donc simplement :

$$m = \frac{P_0 4\pi R_T^2}{g} = 5,25.10^{18}\text{kg}$$

2. Une autre façon est de calculer directement le poids de l'atmosphère. Pour cela, on peut, en première simplification, supposer l'atmosphère en équilibre isotherme. La masse volumique de l'air dépend de l'altitude suivant la loi :

$$\rho(z) = \frac{MP(z)}{RT} = \frac{MP_0}{RT}\mathrm{e}^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

On divise ensuite l'atmosphère en petites couches d'épaisseur dz. Chaque couche a pour masse :

$$\mathrm{d}m(z) = 4\pi R_T^2 \mathrm{d}z \rho(z)$$

La masse totale de l'atmosphère vaut donc :

$$m = \int_0^{+\infty} 4\pi R_T^2 \mathrm{d}z \rho(z) = \frac{P_0 4\pi R_T^2}{g}$$

On obtient donc le même résultat !