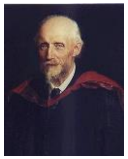
III) Nombre de Reynolds

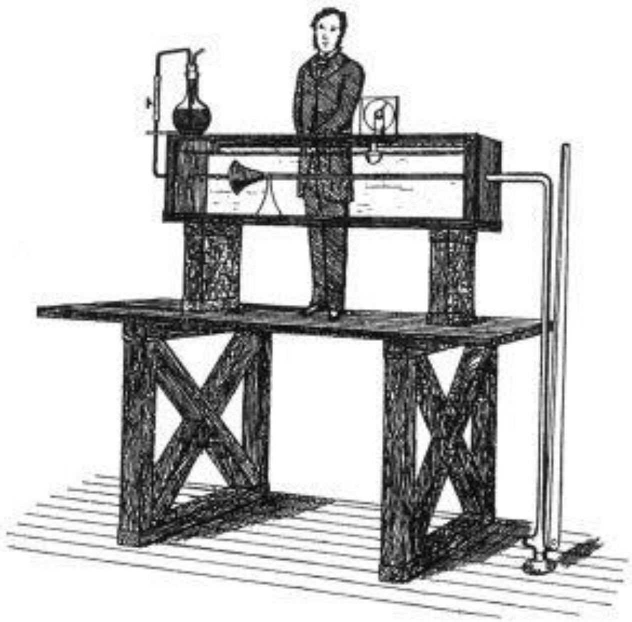
PSI, 2022-2023

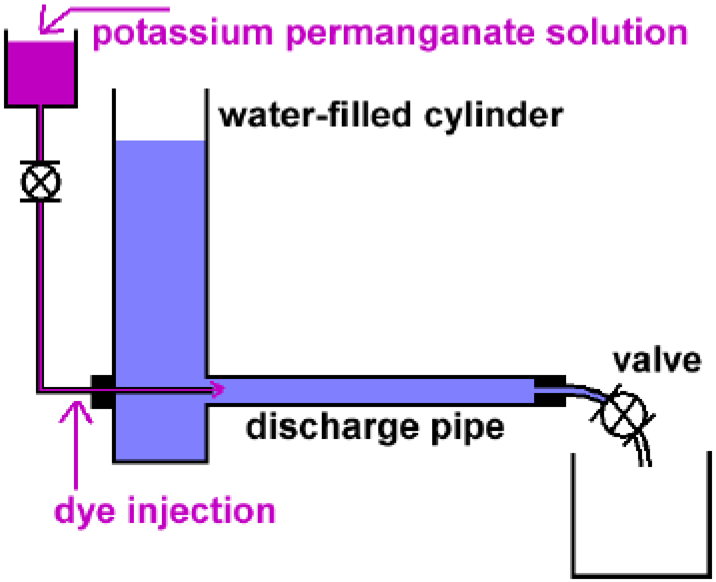
Les cas précédents (Couette et Poiseuille) reposent sur l'hypothèse qu'on peut diviser l'écoulement en couches ne se mélangeant pas. Ce n'est pas toujours le cas.

1) Expérience de Reynolds

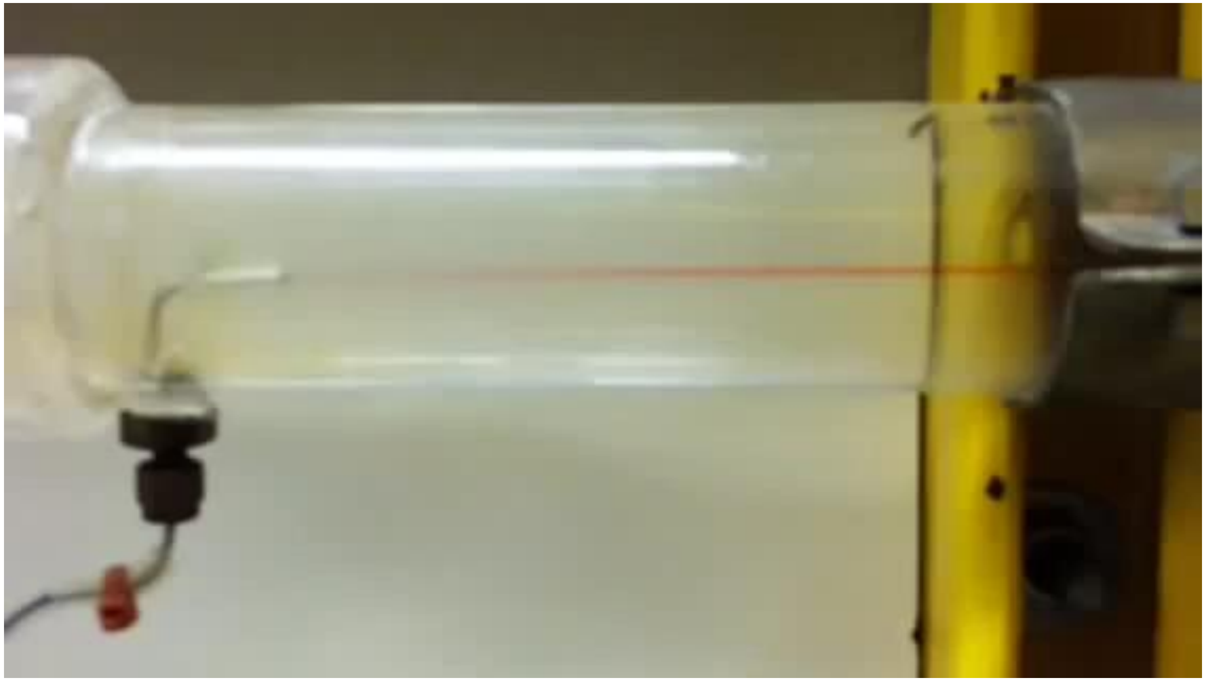


L'expérience historique d'O. Reynolds (1883) consiste à faire s'écouler dans un tube transparent un filet coloré du même liquide que celui qui circule dans le tube et à la même vitesse.





Reynolds n'a pas seulement fait varier la vitesse de l'écoulement, mais aussi le diamètre du tube et la viscosité du fluide (utilisation de fluides différents).



Observations

- Pour des vitesses faibles, des diamètres grands et des viscosité grandes, l'écoulement est lisse, on dit qu'il est **laminaire**.

- Pour des vitesses grandes, des diamètres petits et des viscosité faible, l'écoulement est chaotique (tourbillons), on dit qu'il est **turbulent**.

2) Nombre de Reynolds

- Reynolds remarque que des fluides avec des vitesses et des rayons différents peuvent être très similaires.

- Le paramètre qui détermine la nature d'un écoulement est une combinaison des trois paramètres: **vitesse moyenne de l'écoulement**, **diamètre du tube**, **viscosité**.

  Il s'agit d'un nombre sans dimension, appelé **nombre de Reynolds**:

vitesse débitante

distance caractéristique

$$\boxed{\mathcal{R}_e = \frac{U d}{\nu}}$$

viscosité cinématique

- La viscosité cinématique est définie par: $\boxed{\nu = \frac{\eta}{\mu}}$

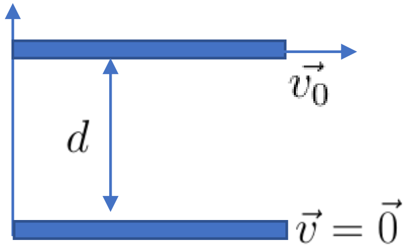
- Dimensions de $\mathcal{R}_e$:

$$[\mathcal{R}_e] =$$

- Remarque: signification des deux coefficients de viscosité.
  - La **viscosité dynamique** relie le champ des vitesses dans l'écoulement à la force de viscosité

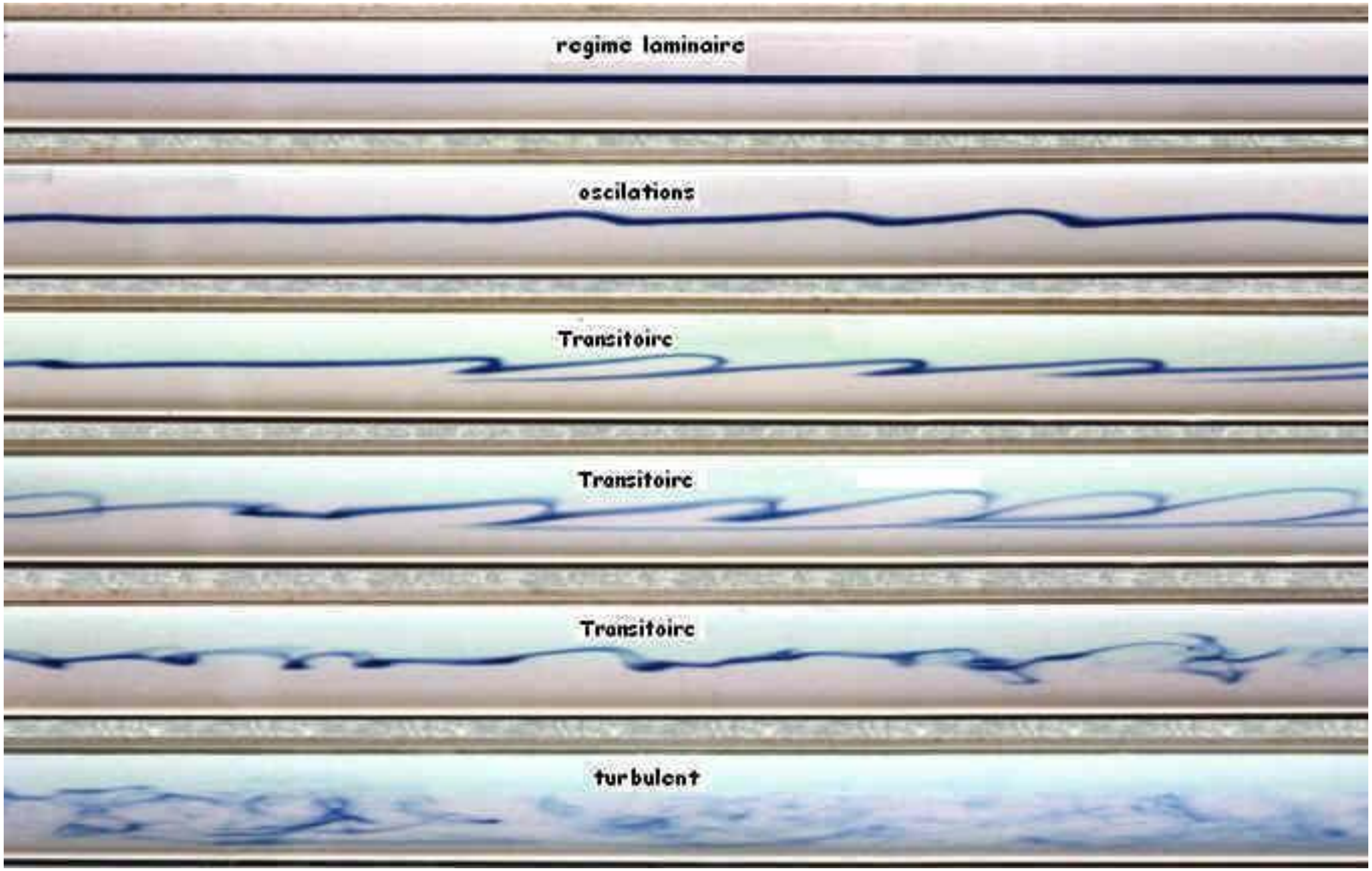
$$\mathrm{d}\vec{F} = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(z)\mathrm{d}S\vec{u}_x$$

  - La **viscosité cinématique** est liée au temps τ de mise en mouvement d'une couche de fluide fixe par une couche mobile distante de d :



$$\boxed{\nu = \frac{d^2}{\tau}}$$

$$\nu_{\text{eau}} \approx 10^{-5}\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$$
$$\nu_{\text{air}} \approx 10^{-6}\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$$



$\mathcal{R}_e \approx 1$

$\mathcal{R}_e \nearrow$

$\mathcal{R}_e > 2000$

On retiendra:

$\mathcal{R}_e < 2000$	Écoulement laminaire
$\mathcal{R}_e > 2000$	Ecoulement turbulent

Quelques ordres de grandeurs

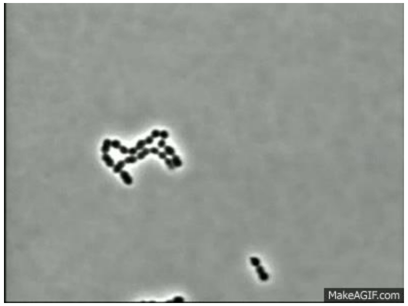
Ecoulement de l'eau d'un robinet de cuisine

$$\mathcal{D}_v = 12\text{L.min}^{-1}$$
$$d = 1\text{cm}$$

Ecoulement d'une rivière

$$\mathcal{D}_v = 200\text{m}^3.\text{s}^{-1}$$
$$d = 10\text{m}$$

Déplacement d'une bactérie dans du plasma



$$v_{\text{bactérie}} = 5\mu\text{m.s}^{-1}$$
$$d_{\text{bactérie}} = 4\mu\text{m}$$

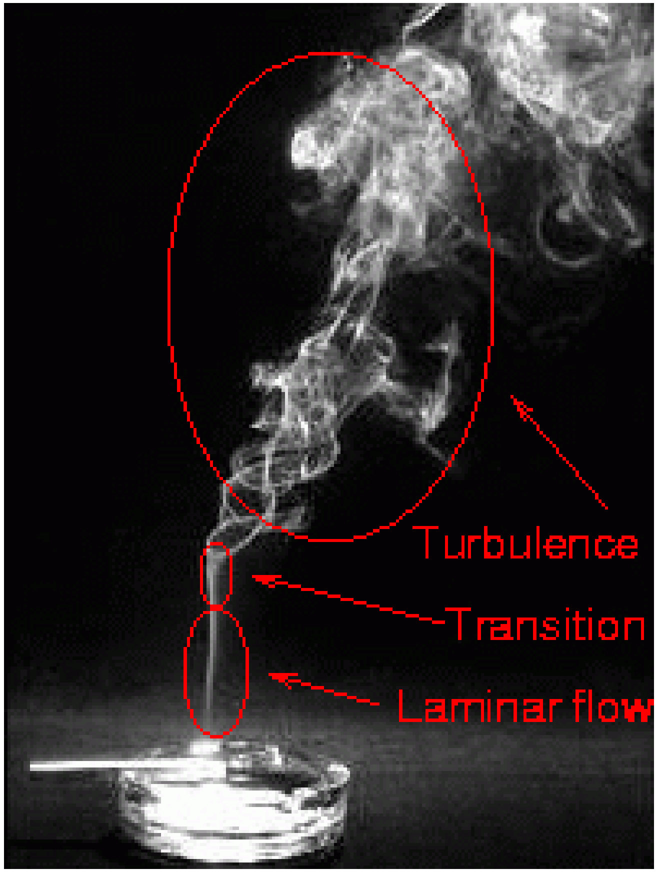
- En général, les écoulements « communs » (liquide ou gaz dans canalisation, écoulement autour d'une voiture, d'un avion, d'un bateau) sont **turbulents**.

- Les écoulements laminaires concernent les écoulements très lents (magma, glaciers), les écoulement dans les milieux poreux (pétrole) et les écoulements à petite échelle (microbiologie) mais aussi des fontaines…

!

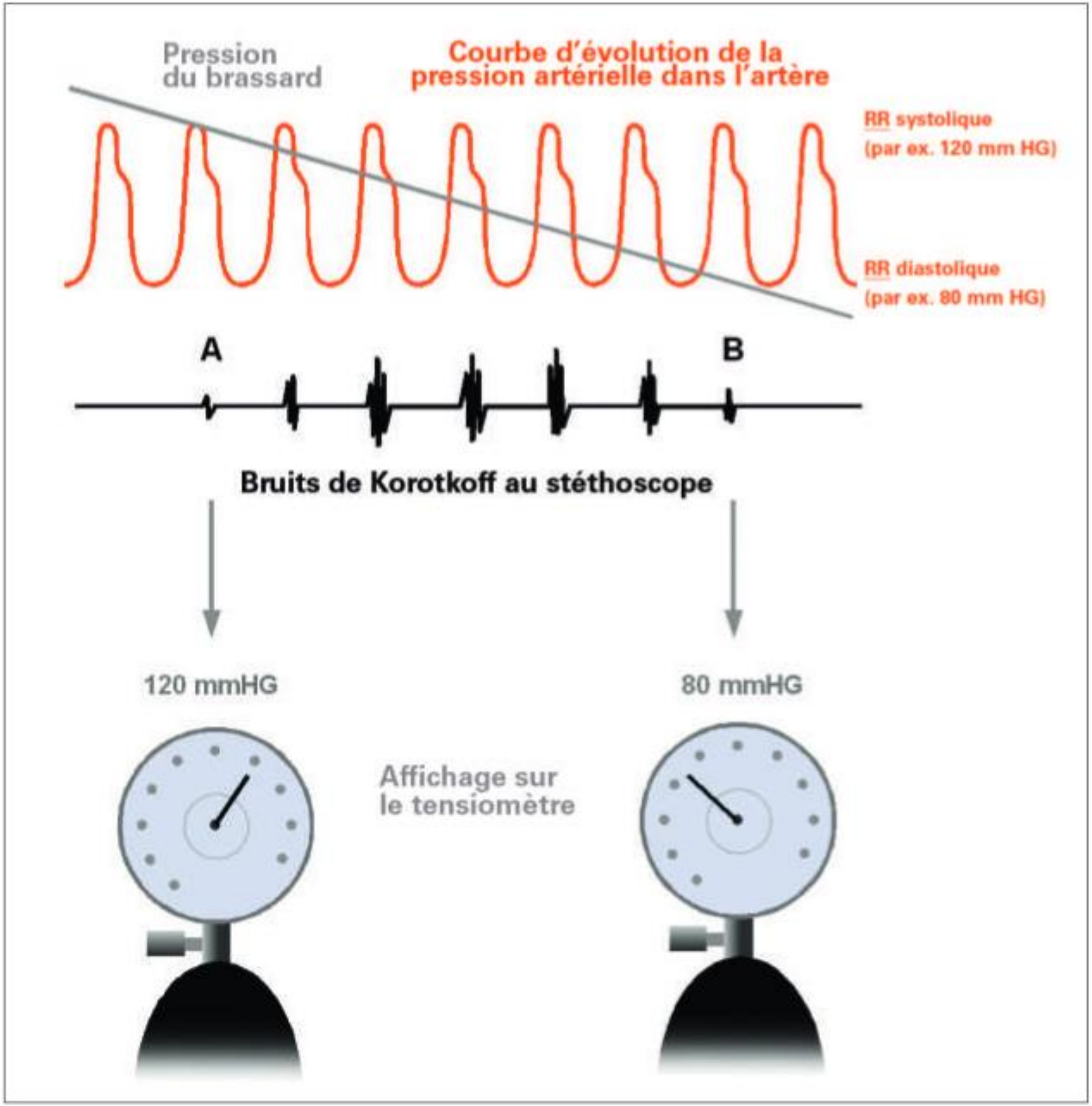
L'étude des écoulements de Couette et de Poiseuille ainsi que la loi de Hagen-Poiseuille ne sont valables qu'en régime laminaire!

Autres exemples connus



Le mélange {air- fumée} sortant de la cigarette étant beaucoup plus chaud que l'air environnant, il est aussi beaucoup moins dense. Il est donc accéléré par la poussée d'Archimède. Lorsque la fumée a atteint une certaine vitesse, l'écoulement devient turbulent.

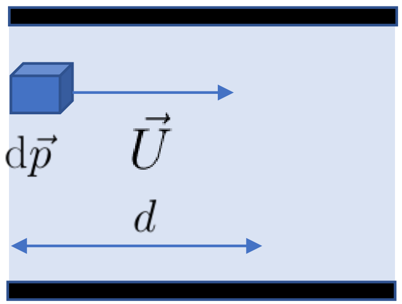
• Bruits de Korotkoff



3) Signification du nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds mesure les effets relatifs des deux modes de transports de quantité de mouvement dans un écoulement:

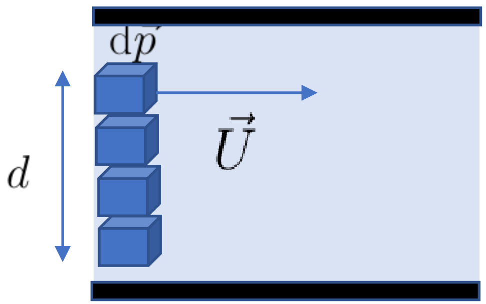
- le transport par **convection** (dû à l'inertie) qui se fait dans le sens de l'écoulement.



Chaque particule de fluide transporte avec elle une quantité de mouvement $\mathrm{d}\vec{p}$. Considérant que chaque particule se déplace à la vitesse moyenne *U*, le temps de transport de cette quantité de mouvement sur une distance *d* vaut:

$$\tau_{\mathrm{conv}} \sim \frac{U}{d}$$

- Le transport par diffusion (dû à la viscosité) qui se fait dans le sens perpendiculaire à l'écoulement.



Une particule de fluide entraîne par viscosité la particule en dessous, qui entraîne la particule en dessous…

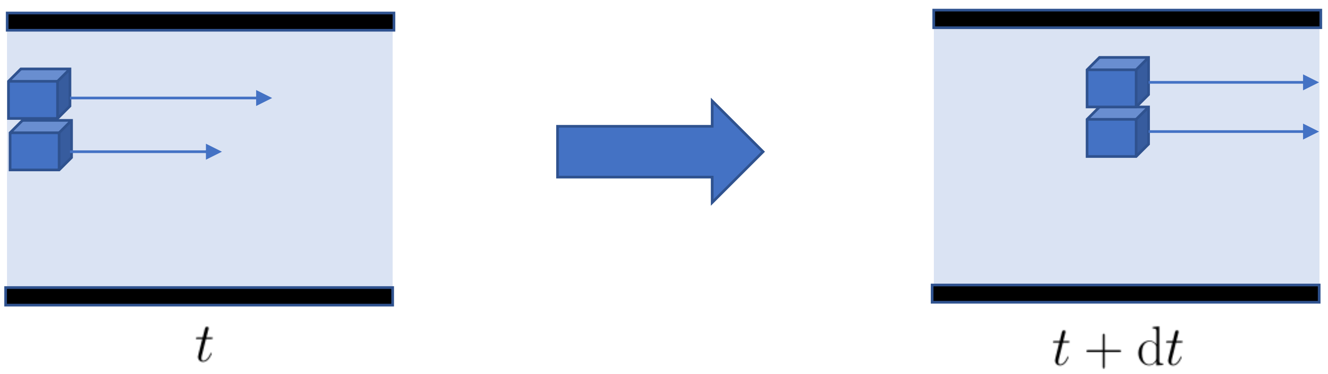
Sur une distance *d*, une particule sera mise en mouvement de cette façon après un temps:

$$\tau_{\mathrm{diff}} \sim \frac{d^2}{\nu}$$ (admis)

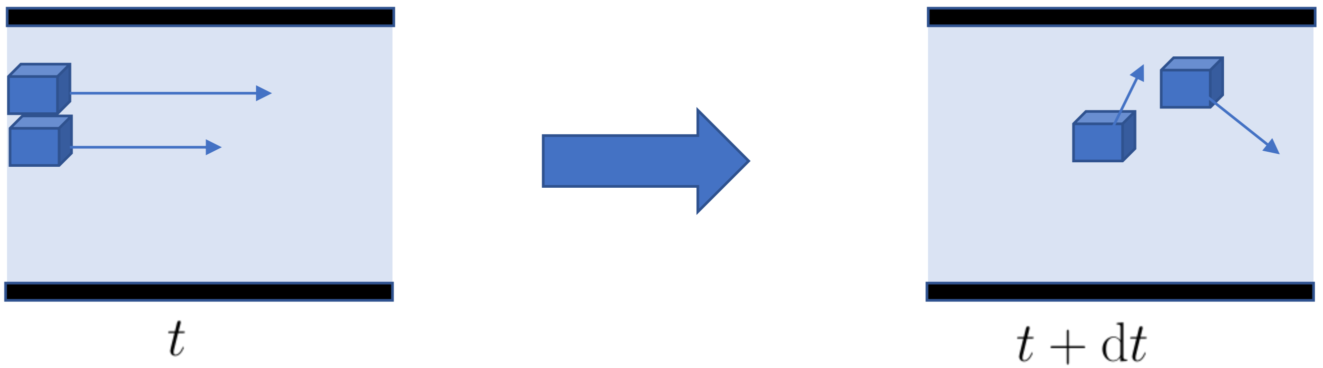
On remarque que:

$$\boxed{\frac{\tau_{\mathrm{diff}}}{\tau_{\mathrm{conv}}} = \frac{d^2}{\nu} \times \frac{U}{d} = \frac{dU}{\nu} = \mathcal{R}_e}$$

- Cas où: $\mathcal{R}_e \ll 1 \Longleftrightarrow \tau_{\text{diff}} \ll \tau_{\text{conv}}$
  - Les effets de viscosité sont dominants dans le fluide. Ces effets ont tendance à lisser et à homogénéiser l'écoulement. Les particules de fluide restent « accrochées » entre elles.



- Cas où: $\mathcal{R}_e \gg 1 \Longleftrightarrow \tau_{\text{conv}} \ll \tau_{\text{diff}}$
  - Les effets d'inertie sont dominants. Chaque particule a tendance à agir indépendamment des autres. Le moindre écart de vitesse entre particules voisines tend à s'accroître. Des écarts locaux existent.



4) Principe de similitude

Deux écoulements différents (vitesses, rayons) mais de nombre de Reynolds égaux auront des propriétés dynamiques similaires.

En particulier, pour qu'un modèle réduit d'un prototype donne des résultats intéressant, il faut s'assurer que le nombre de Reynolds de l'écoulement du modèle réduit soit identique à celui de l'écoulement réel.

En fait, c'est même plus compliqué car il existe d'autres nombres sans dimensions qui doivent aussi être conservés par le redimensionnement comme:

$$M = \frac{U}{c}$$

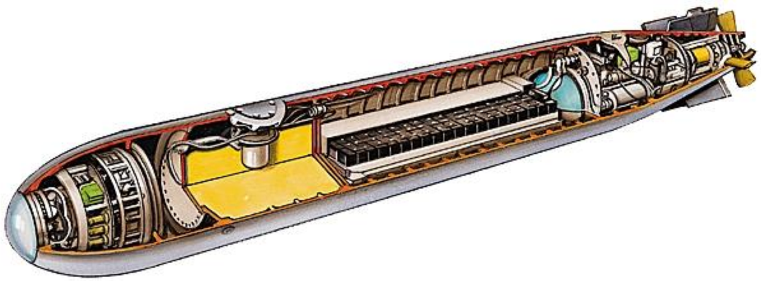
Nombre de Mach

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gD}}$$

Nombre de Froude

Exemple

On veut tester un prototype de torpille de 6m de large se déplaçant à 30m/s dans l'eau à l'aide d'un modèle réduit à l'échelle 1/6e.



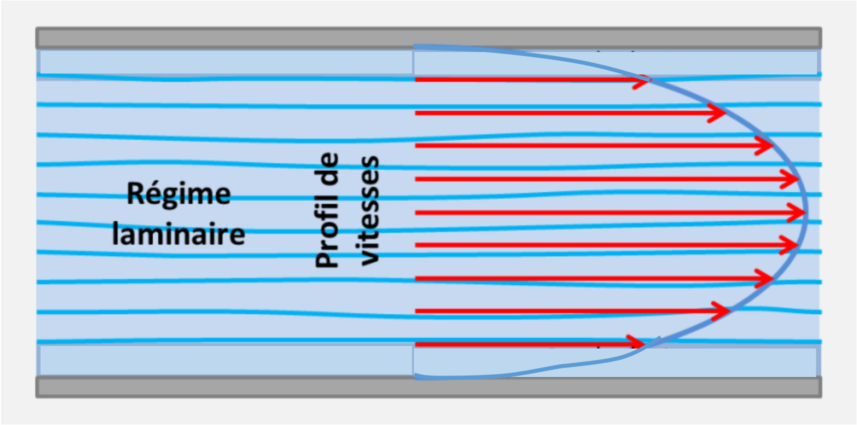
Quelle doit être la vitesse de l'écoulement pour le prototype pour pouvoir étudier la turbulence au voisinage de la torpille?

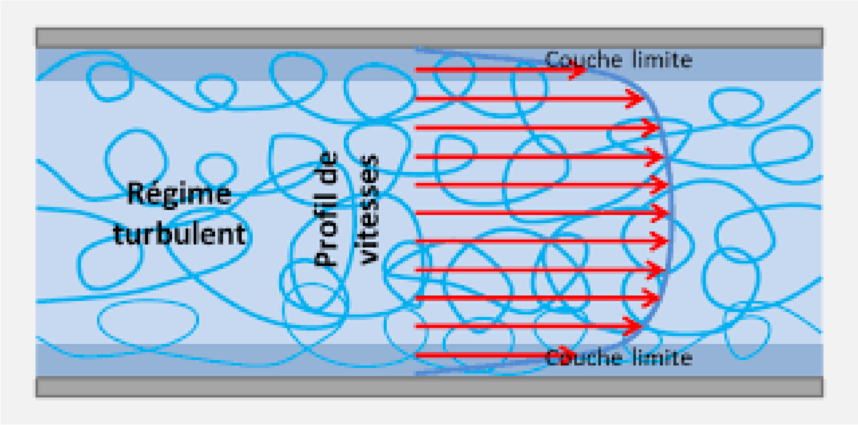
IV) Ecoulement dans une conduite cylindrique à grand nombre de Reynolds

Que peut-on dire sur les écoulements turbulents?

1) Profil des vitesses

A grand nombre de Reynolds, le profil des vitesses est chaotique. On peut néanmoins tracer un profil des vitesses en effectuant des moyennes temporelles $< \vec{v}(M,t) >$.

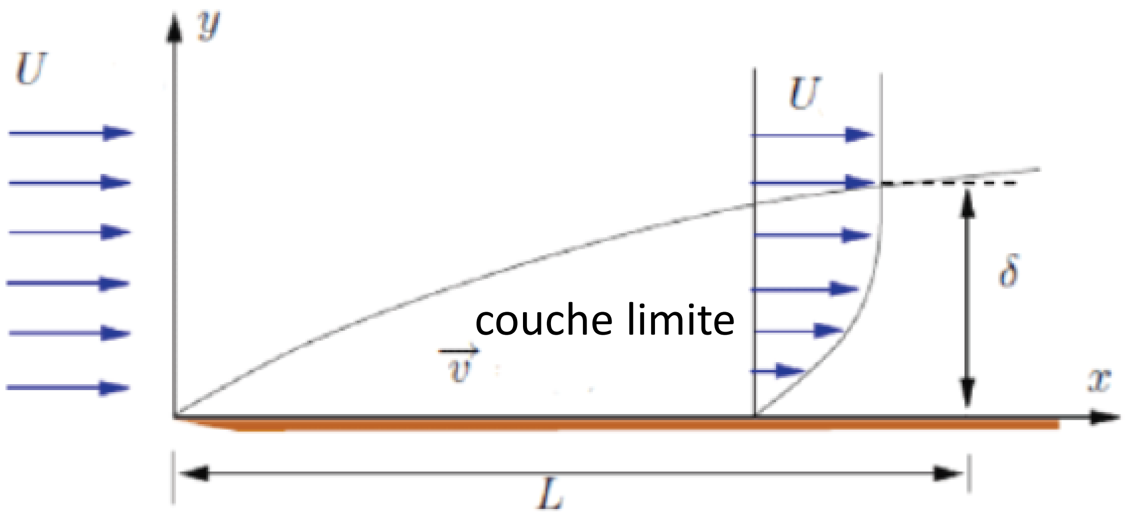




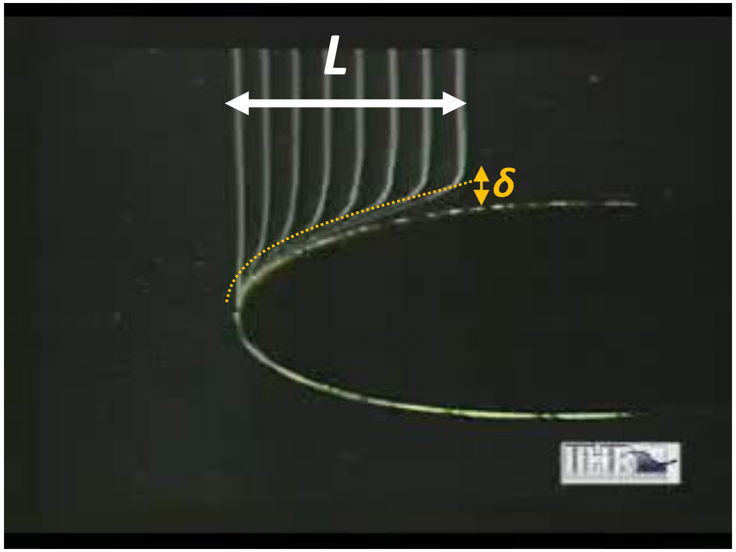
Le profil moyenné dans le cas turbulent est beaucoup plus régulier que le profil laminaire. La vitesse est quasiment **uniforme** sur une section droite du tube à part dans une zone très proche des parois appelée **couche limite**.

2) Couche limite

- A grand nombre de Reynolds, le profil des vitesses est uniforme sauf au voisinage des parois d'un tuyau ou de l'obstacle.



bord de l'obstacle



- La couche limite est due à la viscosité du fluide. En effet, celle-ci impose l'adhérence du fluide à la paroi de l'obstacle. En dehors de la couche limite, on peut considérer l'écoulement comme parfait (la viscosité ne joue plus aucun rôle).

Epaisseur de la couche limite.

Soit un front de l'écoulement arrivant sur un obstacle de longueur L à la vitesse *U*. Ce front parcourt la distance *L* en un temps:

$$\tau = \frac{L}{U}$$

Pendant cette durée, les effets de viscosité diffusent à partir de la paroi sur une distance δ telle que:

$$\tau = \frac{\delta^2}{\nu}$$

Pour $\mathcal{R}_e < 1$ Pour $\mathcal{R}_e > 1000$

La couche limite n'a d'intérêt que pour des écoulements turbulents.

Exemple pour une voiture roulant à 100 km/h