TD n°8 Dynamique des fluides visqueux

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆ Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Ecoulements de type Couette

1.1 Ecoulement sur un plan incliné

On reprend l'écoulement de Couette vu en cours mais cette fois, on considère un écoulement libre d'huile sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 10°$. L'écoulement est supposé permanent, homogène et incompressible.

1. Faire un schéma et introduire un système de coordonnées adaptés à la description du problème. De quel(les) variable(s) dépend le champ des vitesses à l'intérieur du fluide ?
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un système bien choisi, déterminer une équation différentielle vérifiée par le champ des vitesses.
3. Quelles sont les conditions aux limites imposées par l'écoulement ?
4. En déduire l'expression du champ des vitesses.

1.2 Viscosimètre de Couette

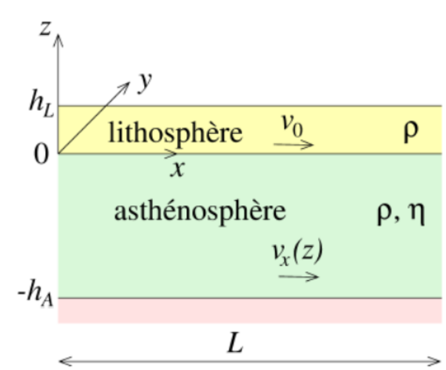
On considère l'écoulement d'un fluide visqueux de viscosité η entre deux cylindres concentriques de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, tournant autour de leur axe commun aux vitesses angulaires respectives ω_1 et ω_2. On propose un champ des vitesses du fluide de la forme

$$\vec{v} = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\vec{u}_\theta$$

1. Déterminer complètement le champ des vitesses.
2. Par analogie avec le cas de l'écoulement plan, exprimer la force de cisaillement exercée par le fluide intérieur sur le fluide extérieur à travers une surface élémentaire d'aire dS normale à $\vec{u}_r$. Déterminer le couple exercé par le fluide sur le cylindre extérieur.
3. On utilise le viscosimètre pour mesurer la viscosité de l'huile d'olive. Un opérateur exerce un couple C pour maintenir le cylindre extérieur fixe, le cylindre intérieur tournant à la vitesse constante $\omega_1 = 3$ tours par seconde. On mesure $C = 9,4.10^{-2}$ N·m. On donne $R_1 = 4,8$ cm, $R_2 = 5,0$ cm, $h = 15$ cm. Déterminer la viscosité de l'huile d'olive.

1.3 Plaque tectonique (difficile) •⋄

On considère une plaque tectonique aussi appelée lithosphère, de longueur L, d'épaisseur h_L, qui se déplace suivant l'axe Ox à une vitesse constante et uniforme v_0. Cette plaque repose sur l'asthénosphère qui a une épaisseur h_A. Les densités de la lithosphère et de l'asthénosphère sont ici supposées égales. On prendra l'origine des ordonnées sous la plaque, à la surface de l'asthénosphère. On considèrera que $L >> h_L$ et h_A et on admettra que la vitesse dans l'asthénosphère $v_x(z)$ est parallèle à l'axe Ox. Au bas de l'asthénosphère ($z = -h_A$), la vitesse est nulle. On note $p(x,z)$ la pression dans l'asthénosphère.



1. En supposant le gradient horizontal de pression nul, exprimer la pression en fonction de z. On négligera la pression à la surface de la plaque.
2. En effectuant un bilan des forces sur une particule fluide, calculer le profil des vitesses dans l'asthénosphère. Quelle est la contrainte (force par unité de surface) tangentielle visqueuse qui s'exerce sous la plaque en mouvement ?
3. Exprimer en fonction de v_0, h_L et h_A le débit volumique $\mathscr{D}_v$ induit par le déplacement de la lithosphère et de l'asthénosphère par unité d'épaisseur suivant Oy.
4. Le déplacement global de matière en surface est maintenant compensé par un flux de retour qui assure un débit volumique globalement nul. Montrer que cela impose l'existence d'un gradient de pression horizontal $\frac{\partial P}{\partial x}$. Calculer $\frac{\partial P}{\partial x}$ en fonction de h_L, h_A, v_0 et η ainsi que le profil de vitesse $v_x(z)$ résultant. On pourra ensuite poser $A = 6\left(\frac{h_L}{h_A} + \frac{1}{2}\right)$ pour simplifer les expressions.
5. A quelle profondeur la vitesse s'annulle-t-elle dans l'asthénosphère ? Quelle est la vitesse maximale de retour ? Tracer $v_x(z)/v_0$ en fonction de z/h_A en prenant $A = 4$.
6. Exprimer la contrainte tangentielle visqueuse qui s'exerce sous la plaque en mouvement en fonction de η, v_0, h_L et h_A ? Comment se compare-t-elle à la question du 1).
7. Montrer que l'existence d'un gradient de pression horizontal doit conduire à une inclinaison de la lithosphère (on admettra que l'inclinaison est suffisament faiblepour que la vitesse de l'écoulement dans l'asthénosphère reste horizontale). Exprimer la différence de hauteur entre les deux extrémités de la plaque.

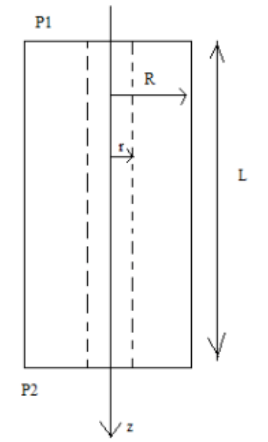
2. Ecoulements de type Poiseuille

2.1 Turbulence⋆

À partir de quelle vitesse U l'écoulement de l'eau dans un tube de diamètre $D = 10$ cm devient-il turbulent ? Qu'en est-il pour l'air dans les conditions normales de température et de pression ?

2.2 Viscosimètre⋆

On considère un capillaire constitué d'un cylindre de rayon R, de longueur L, rempli d'un liquide incompressible de masse volumique μ, de viscosité dynamique η. Le liquide s'écoule longitudinalement dans le capillaire, depuis le haut vers le bas, c'est-à-dire depuis la pression P_1 vers la pression P_2. On suppose l'écoulement permanent (stationnaire) incompressible et homogène.

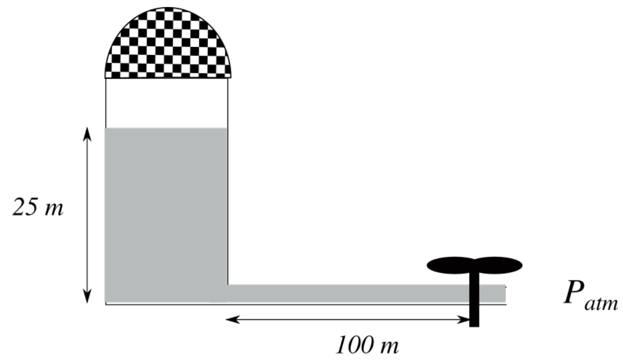


On s'intéresse à une portion de liquide contenue dans un cylindre de rayon r ($r < R$), compris entre les plans de pressions P_1 et P_2 distants de L.

1. En coordonnées cylindriques, montrer que la vitesse ne dépend ni de z ni de θ.
2. Que vaut la vitesse du fluide en contact avec la paroi ? Quel phénomène permet d'attribuer cette valeur ? Quel est le signe de $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$?
3. Donner l'expression des forces de viscosité $\vec{F}_v$ s'exerçant sur la portion de liquide contenue dans le cylindre de rayon r. Quelles sont les autres forces présentes s'exerçant sur la portion de liquide contenue dans le cylindre de rayon r ? Donner leur expression.
4. Montrer que l'accélération de la portion de liquide est nulle.En déduire que le champ des vitesse au sein du fluide vérifie l'équation :
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = kr$$
où k est une constante qu'on exprimera en fonction des données.
5. Déterminer l'expression complète de $v(r)$ et tracer le profil des vitesses.
6. Déterminer l'expression du débit volumique dans l'ensemble du capillaire en fonction des données.

2.3 Château d'eau⋆

On s'intéresse à un réseau de distribution d'eau domestique. Ce type de circuit est alimenté par des châteaux d'eau qui assurent la mise en pression du réseau. L'eau est supposée incompressible, de masse volumique $\mu = 1\text{kg.L}^{-1}$.



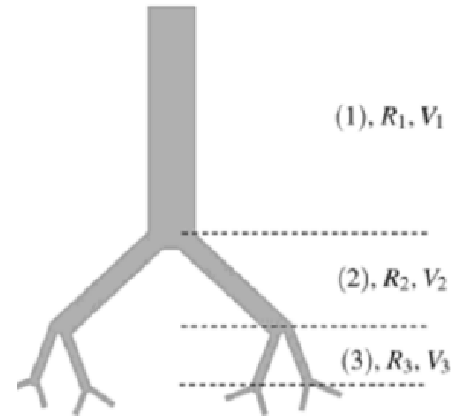
1. Quel est l'ordre de grandeur de la pression qui peut être attendue dans une canalisation au pied d'un château d'eau de 25 m de eau ? On supposera que le débit dans la canalisation est suffisament faible pour ne pas perturber le champ de pression dans le château d'eau. On prendra $g = 10$ m.s^{-2}.

Dans la conduite, l'écoulement est supposé laminaire et permanent. La pesanteur est négligée. La conduite est cylindrique, de section $S = 1,0$ cm^2 et de longueur $L = 100$m. La canalisation part du pied du château d'eau et son autre extrémité est à l'air libre. La pression en entrée est notée P_1 et celle en sortie P_2. Le fluide est newtonien, de viscosité dynamique $\eta = 10^{-3}$ Pℓ.

2. Calculer le débit volumique $D_V$en sortie de la canalisation ainsi que la vitesse moyenne de l'écoulement.
3. Rappeler la loi de Poiseuille ainsi que ses conditions d'application. L'exprimer en fonction des données de l'énoncé. Donner l'expression de la résistance hydraulique R_H de la canalisation et faire l'application numérique.
4. Par analogie avec l'effet Joule, exprimer la puissance dissipée par viscosité en fonction de R_H et D_V. Sachant que la capacité thermique massique de l'eau vaut $c_e = 4,18$ J.K^{-1}.kg^{-1}, calculer l'élévation de température en 1h si l'eau récupère toute l'énergie dissipée.
5. Calculer le nombre de Reynolds pour cet écoulement et conclure.

2.4 Arbre bronchique

Dans un arbre bronchique, les voies respiratoires se divisent par dichotomie avec une réduction systématique de la longueur et du diamètre. Dans le problème on suppose que la trachée se divise en deux bronches. Chacune d'elles se divise à son tour en deux autres, et ainsi de suite. Nous notons " générations " les différentes subdivisions qui seront indicées par les nombres successifs, p : la trachée est la génération $p = 1$, les bronches $p = 2$, et ainsi de suite. On se place en régime stationnaire et l'air est assimilé à un fluide de viscosité $\eta = 1,8.10^{-5}$ Pl. Il y a 23 générations de voies aériennes dont les 16 premières sont conductrices. Une bronchiole de génération p est assimilée à un cylindre de rayon r_p et de longueur ℓ_p.



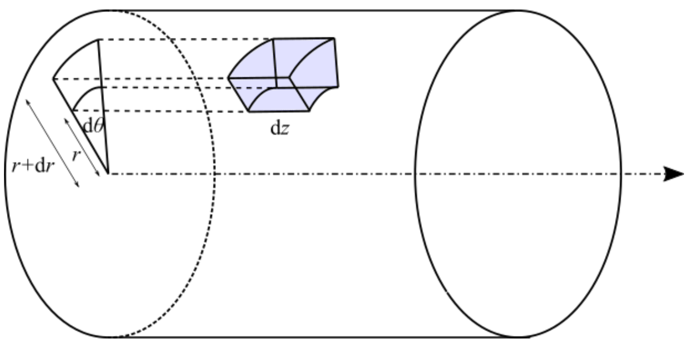
On admet que la loi de Hagen-Poiseuille est valable pour $p < 16$. La figure ci-dessous représente les quatre premières générations d'un arbre bronchique. À chaque génération chaque dimension longueur et rayon est multipliée par h, constante inférieure à un, identique, pour les deux dimensions.

1. Déterminer le nombre $N(p)$ de bronchioles à la $p$ème génération en fonction de p ainsi que le rayon r_p et la longueur ℓ_p de la bronchiole de génération p en fonction de p, h, r_1 et ℓ_1, valeurs pour $p = 1$.
2. Exprimer le volume V_p d'une bronchiole de génération p en fonction de V_1, h et p. En déduire le volume total V_{pt} de génération p. On posera $X = 2h^3$. Exprimer le volume V_t de l'arbre composé de n générations.
3. Calculer la résistance hydraulique R_p d'une bronchiole de génération p en fonction de R_1 (résistance hydraulique pour $p = 1$) et p. En déduire la résistance hydraulique totale de la génération p puis la résistance hydraulique totale de l'arbre qui contient n générations.
4. Montrer que le volume total diverge quand $n \to \infty$ pour h supérieur à une valeur critique h_c dont on précisera la valeur numérique. À quelle condition sur h la résistance hydraulique diverge-t-elle ?
5. Pour l'homme, h a été mesuré à $h = 0,85$. Estimer la variation de pression entre l'entrée et la sortie des 16 premières générations correspondant à une inspiration normale.
6. La modélisation par la loi de Hagen-Poiseuille est-elle pertinente ici ?

2.5 Champ des vitesses et de pression dans un écoulement de Poiseuille•

On considère comme dans le cours un écoulement de Poiseuille cylindrique dans une conduite horizontale de rayon R et de largeur L. La viscosité dynamique du fluide est notée η et sa masse volumique μ. L'écoulement est supposé homogène, stationnaire et incompressible.

1. En effectuant un bilan des forces sur une particule de fluide située à la distance r de l'axe de la conduite, déterminer le champ de pression et le champ des vitesses dans l'écoulement. La géométrie de la particule de fluide est rappelée ci-dessous.



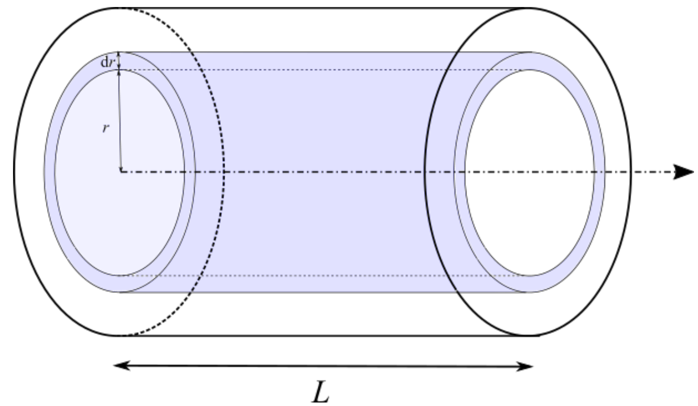
2.6 Puissance dissipée dans un écoulement de Poiseuille•

On a vu dans le cours qu'un écoulement de Poiseuille vérifie la loi d'Ohm hydraulique :

$$\Delta P = P_e - P_s = R_{\text{th}} \mathscr{D}_v \text{ avec } R_{\text{th}} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

c'est à dire que l'extérieur (une pompe par exemple) doit imposer une différence de pression ΔP pour assurer un débit $\mathscr{D}_v$. On cherche dans cet exercice à démontrer que la puissance à fournir par la pompe vaut : $\mathscr{P}_{\text{diss}} = R_{\text{th}} \mathscr{D}_v^2$. Pour une conduite horizontale, cette puissance est intégralement dissipée par les forces de viscosité puis convertie en chaleur.

Pour calculer $\mathscr{P}_{\text{diss}}$, on commence par s'intéresser à une petite cerne cylindrique de rayon interne r et d'épaisseur dr (figure ci-dessous).



1. Question préliminaire : exprimer le volume dV d'une petite cerne cylindrique (cf. figure ci-dessus) et montrer qu'en sommant le volume de toutes les cernes comprises dans le cylindre, on retrouve le volume total du cylindre.
2. Exprimer la résultante d$\vec{F}$ des forces de pression s'exerçant en amont et en aval de la cerne.
3. On rappelle l'expression du champ des vitesses d'un écoulement de Poiseuille cylindrique (on pourra utiliser directement le résultat) :

$$\vec{v}(r) = \frac{R^2}{4\eta}\frac{\Delta P}{L}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{u}_r$$

Exprimer la puissance d$\mathscr{P}_{\text{diss}}$ des forces de pression s'exerçant sur la cerne en amont et en aval puis en déduire l'expression de d$\mathscr{P}_{\text{diss}}$.

3. Ecoulement autour d'un objet

3.1 Mesure de viscosité⋆

On souhaite mesurer précisément la viscosité de la glycérine, dont on sait qu'elle est de l'ordre de 1 Pl. La masse volumique de la glycérine est $\mu_g = 1{,}260.10^3$ kg·m^{-3}. Pour cela, on fait chuter une bille de silice de masse volumique $\mu_s = 2{,}5.10^3$ kg·m^{-3} et de rayon $R = 0{,}75 \pm 0{,}01$mm dans un récipient cylindrique rempli de glycérine. On souhaite mesurer la vitesse en régime permanent pour en déduire η.

1. Déterminer un ordre de grandeur de la vitesse limite v_{lim} suivant que le régime est laminaire ou turbulent. Conclure.
2. Comment faut-il choisir les dimensions du récipient (rayon et hauteur) ? L'expérience nécessite-t-elle l'utilisation d'une caméra rapide ? D'une caméra ?
3. Une fois la vitesse limite atteinte, on mesure une distance parcourue $h = 10{,}0 \pm 0{,}2$ cm en une durée $T = 98{,}0 \pm 0{,}2$ s. En déduire η avec son incertitude.

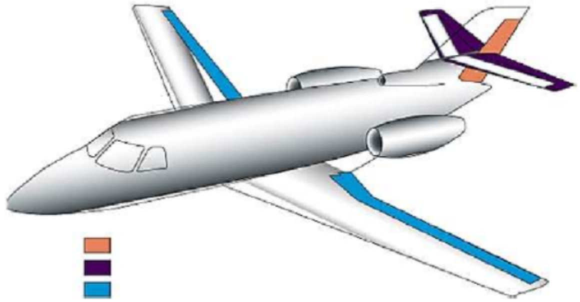
3.2 Aviron•

Un skiff est une embarcation de course avec avirons, dans laquelle prend place un unique rameur. Il existe aussi des embarcations regroupant jusqu'à 8 rameurs. Le record du monde de vitesse en skiff est de 17,4 km.h^{-1}. Avec 8 rameurs, il est de 21,4 km.h^{-1}. L'objet de cet exercice est de comprendre pourquoi la différence n'est pas plus importante, et de dégager des ordres de grandeurs grâce à des facteurs d'échelle. On donne la viscosité dynamique de l'eau $\eta = 1,0.10^{-3}$ Pl. On suppose que les embarcations se déplacent en ligne droite avec vitesse de norme v constante.

1. Évaluer le nombre de Reynolds pour un skiff. En déduire la façon dont la force de traînée dépend de la norme v de la vitesse.
2. Si on double la puissance développée par le (ou les) rameur(s), par combien v est-elle multipliée ?
3. Une personne développant une puissance P_0 fait avancer son skiff à 14 km/h. Quelle est en fonction de P_0 la puissance développée par le recordman du monde ?
4. En supposant, pour simplifier, que la partie immergée d'une embarcation pour 8 rameurs est homothétique de celle d'une embarcation pour 1 seul, et en faisant les hypothèses qui vous semblent légitimes, établir un lien entre la vitesse d'un skiff et celle d'une embarcation à 8 rameurs. Commenter, compte tenu des records de vitesse pour les deux types de bateaux.

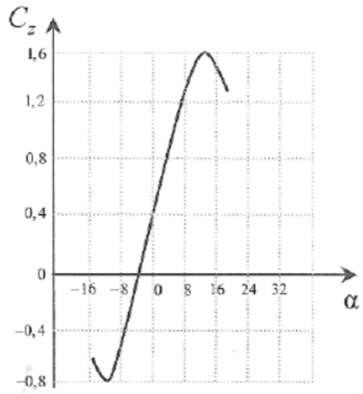
3.3 A 380⋆

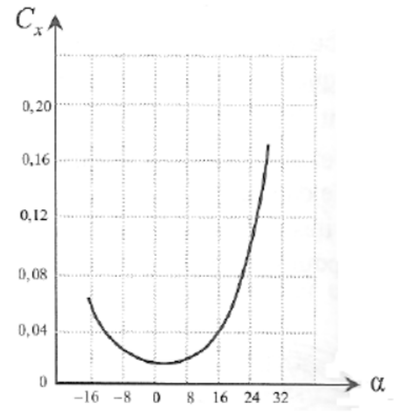
1. Calculer la vitesse d'un A380 au décollage au niveau de la mer, à une température de 20 ° C, pour une masse de 421 tonnes, une surface portante de 845 m^2 et un coefficient de portance $C_z = 1{,}38$. Calculer la variation relative de cette vitesse due à une variation de température de 20 °C. Commenter.
2. Vaut-il mieux décoller avec le vent de face, de derrière ou de côté ?
3. On distingue 3 axes de rotation pour l'avion : l'axe de tangage, dans la direction des ailes, l'axe de roulis dans la direction de l'avion et l'axe de lacet perpendiculaire aux deux autres. Représenter ces 3 axes sur un schéma.
4. Différentes parties mobiles (cf. schéma ci dessous) permettent de jouer sur les rotations autour de ces axes. Par exemple, lorsque la vitesse de décollage est atteinte, le pilote actionne la gouverne de profondeur, ce qui provoque la rotation de l'avion (le nez s'élève). Identifier cette gouverne sur le schéma ci-dessous. À quoi servent les autres parties mobiles ?



3.4 Portance et traînée d'un avion de tourisme léger⋆

Les courbes ci-dessous, obtenues par des essais en souffleries à l'aide d'une balance aérodynamique, représentent l'évolution des coefficients de portance C_z et de traînée C_x en fonction de l'angle d'incidence α pour un profil d'aile.

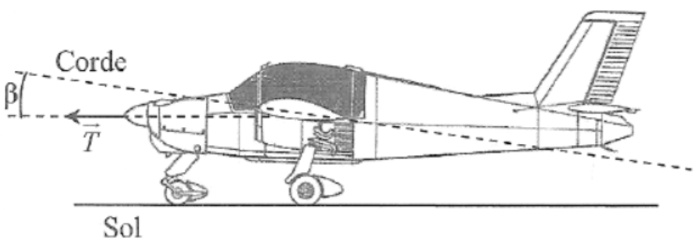




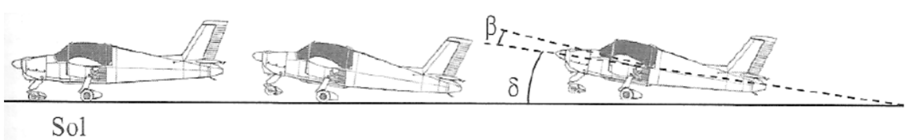
1. (a) Commenter l'allure des courbes ainsi que les ordres de grandeur des valeurs respectives de C_z et C_x pour une incidence donnée. Discuter l'intérêt de ce profil d'aile.
   (b) À partir de quelle incidence l'aile est-elle potentiellement en situation de décrochage ? Proposez une interprétation en vous appuyant sur vos

connaissance sur le couche limite. Dans la comparaison des courbes de C_z et de C_x était-il possible de prévoir l'augmentation de traînée lorsque la portance chute à forte incidence ?

2. Dans toute la suite, on assimilera pour simplifier les coefficients de portance et de traînée de l'aile à ceux de l'avion et on supposera que le pilote ne fait pas usage des volets pour décoller. La corde fait avec l'axe longitudinal de l'avion un angle β de 4° (angle de calage). La force de traction $\vec{T}$ qu'exerce le moteur de l'avion sera prise de même support que son axe longitudinal.



   (a) Dans la phase de roulage précédent l'instant du décollage, le pilote tire momentanément sur le manche de sorte que la queue de l'avion s'enfonce. L'avion étant à charge maximale, à quel angle δ le pilote doit-il choisir de placer l'axe longitudinal de l'avion par rapport au sol ? Faire un schéma en représentant les forces s'exerçant sur l'avion et le vent relatif à l'infini. Quelle est la vitesse minimum à l'instant où les roues quittent le sol ? On donne la surface alaire $S = 12$ m^2 et la masse maximale $m = 750$ kg.



   (b) Juste après le décollage, le pilote remet le manche au neutre et fait ainsi monter l'avion sur une trajectoire confondue avec le support de son axe longitudinal incliné du même angle δ par rapport au sol qu'à l'instant du décollage. Comment est modifié le schéma précédent ? Sachant que la puissance maximale du moteur équipant l'appareil est de 75 kW, à quelle pourcentage de la puissance maximale faut-il alors se placer pour assurer cette phase ascensionnelle stabilisée ?