TD n°7 Cinématique des fluides

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Caractéristique d'un écoulement

1. L'expression de la vitesse dépend de x et de y, l'écoulement n'est donc pas uniforme. L'expression de la vitesse ne dépend pas de t, l'écoulement est donc stationnaire. La divergence du vecteur vitesse vaut :

$$\mathrm{div}\vec{v} = k + k = 2k \neq 0$$

L'écoulement est donc compressible. *Remarque : on peut en déduire qu'il s'agit de l'écoulement d'un gaz.*

2. Par définition d'une ligne de courant, celle-ci est tangente au vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ au point M.
3. Exprimons le produit vectoriel :

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} = kx\mathrm{d}y - ky\mathrm{d}x = 0$$

On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + \mathrm{cste} \Rightarrow \boxed{y = ax \quad a \in \mathbb{R}}$$

Les lignes de courants sont des droites passant par l'origine. *L'écoulement semble être similaire à celui d'une explosion de gaz survenant au point O.*

Equation locale de conservation de la masse avec hauteur variable

Il s'agit de redémontrer l'équation de conservation de la masse en faisant attention au fait que la section $S(x,t) = h(x,t)L$ n'est plus constante !

Considérons une petite tranche d'écoulement entre x et $x+\mathrm{d}x$. La variation interne de masse vaut :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 m &= \mathrm{d}m(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}m(t) \\ &= \mu S(x,t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}x - \mu S(x,t)\mathrm{d}x \\ &= \mu L \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Les échanges de masse à l'entrée et à la sortie pendant $\mathrm{d}t$ valent :

$$\begin{aligned} \delta m_e &= \mathscr{D}_m(x,t)\mathrm{d}t = \mu L h(x,t) v(x,t)\mathrm{d}t \\ \delta m_s &= \mathscr{D}_m(x+\mathrm{d}x,t)\mathrm{d}t = \mu L h(x+\mathrm{d}x,t) v(x+\mathrm{d}x,t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Le bilan de masse sur la petite tranche donne :

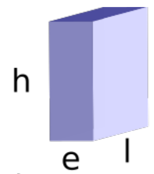
$$\mathrm{d}^2 m = \delta m_e - \delta m_s$$

$$\mu L \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \mu L h(x,t) v(x,t)\mathrm{d}t - \mu L h(x+\mathrm{d}x,t) v(x+\mathrm{d}x,t)\mathrm{d}t$$

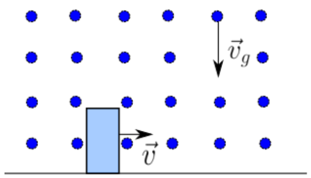
$$\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial (hv)}{\partial x}(x,t)$$

Résolution de problème : course sous la pluie⋄

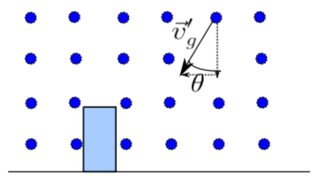
Effectuons un schéma de la situation :



Un piéton pour un physicien



Réferentiel terrestre



Réferentiel du piéton

On modélise le piéton par un bloc de hauteur $h = 1,70$m, de largeur $\ell = 50$cm et d'épaisseur $e = 30$cm. On note $n^\star$ le nombre de gouttes dans l'atmosphère par unité de volume. Dans le référentiel du piéton, les gouttes d'eau arrivent avec une vitesse $\vec{v}'_g = \vec{v}_g + \vec{v}$. Cette vitesse fait un angle θ avec la verticale.

Cherchons à évaluer le nombre de gouttes reçues par le piéton pendant dt. On a :

— les gouttes qui tombent sur la tête et les épaules. Pendant dt, il y en a :

$$\delta N_1 = n^\star v'_g \mathrm{d}t e \ell \cos\theta = n^\star v_g e \ell \mathrm{d}t$$

— les gouttes qui tombent sur le corps face à la pluie. Il y en a :

$$\delta N_2 = n^\star v'_g \mathrm{d}t h \ell \sin\theta = n^\star v h \ell \mathrm{d}t$$

Pendant tout le trajet d'une durée $\Delta t = \frac{L}{v}$, le nombre de gouttes reçu vaudra donc :

$$N = (n^\star v_g e \ell + n^\star v h \ell)\frac{L}{v} = n^\star \ell L e \frac{v_g}{v} + n^\star \ell h L$$

On voit que plus v est grand, plus N diminue. Il vaut donc mieux courir plutôt que marcher. On remarque aussi que le nombre de gouttes reçu sur le corps et les jambes ne dépend pas dela vitesse à laquelle on se déplace, contrairement au nombre de gouttes qu'on reçoit sur la tête.