

TD n°8 Correction

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

- ★ Exercice niveau CCP
- Exercice niveau Centrale/Mines
- ◇ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

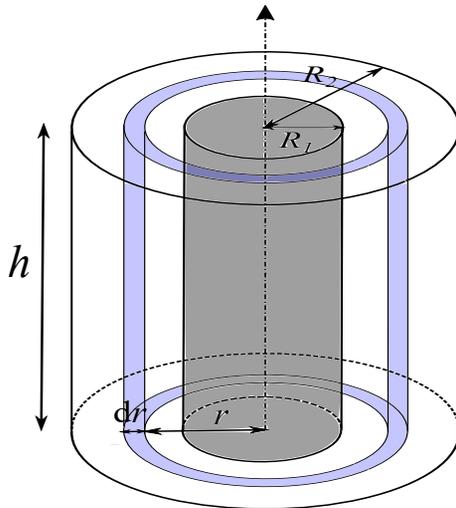
1. Ecoulement de type Couette

Viscosimètre de Couette

- On utilise les conditions aux limites :

$$\begin{cases} R_1 \omega_1 = AR_1 + \frac{B}{R_1} \\ R_2 \omega_2 = AR_2 + \frac{B}{R_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = A + \frac{B}{R_1^2} \\ \omega_2 = A + \frac{B}{R_2^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{(R_1 R_2)^2}{R_2^2 - R_1^2} (\omega_1 - \omega_2) \\ A = \frac{R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \end{cases}$$

- On considère comme système {une petite tranche d'écoulement cylindrique de rayon r d'épaisseur dr et de hauteur h } :



Cette tranche subit des forces de pressions ainsi que des forces tangentiellees de viscosité (appelées ici forces de "cisaillement") dues aux couches voisines. Par analogie avec l'écoulement de Couette plan, la force exercée par la couche de fluide comprise entre $r - dr$ et r sur le système vaut :

$$d\vec{F} = -\eta \frac{\partial v}{\partial r}(r) dS \vec{u}_\theta$$

Petite remarque : pour trouver le signe, on réfléchira intuitivement !

- Si le cylindre de rayon R_1 va plus vite que le cylindre de rayon R_2 , cela signifie que la vitesse du fluide décroît avec r et que la dérivée de $v(r)$ est négative. Comme les couches inférieures de fluide accélèrent les couches supérieures, il faut mettre un signe moins devant l'expression pour avoir une force motrice.
- On aurait bien sûr pu considérer le cas inverse : si le cylindre de rayon R_1 va moins vite que le cylindre de rayon R_2 , la vitesse du fluide croît avec r , donc les couches inférieures freinent les couches supérieures. La dérivée de $v(r)$ étant positive, il faut aussi mettre un moins devant l'expression de la force pour que celle-ci soit résistante.

La force exercée par le fluide sur un petit élément dS de la surface latérale du cylindre extérieur vaut donc :

$$d\vec{F} = -\eta \frac{\partial v}{\partial r}(r = R_2) dS \vec{u}_\theta = -\eta \left(A - \frac{B}{R_2^2} \right) dS \vec{u}_\theta = -2\eta \frac{R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} dS \vec{u}_\theta$$

Le moment de cette force par rapport à l'axe de rotation vaut :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \vec{OM} \wedge d\vec{F} = -2\eta R_2 \frac{R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} dS \vec{u}_z$$

Le couple C_r exercé par le fluide est la somme de ces moments sur toute la surface extérieure. Il vaut donc :

$$C_r = \iint S_{\text{ext}} d\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}_z = -4\pi\eta R_2^2 h \frac{R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2}$$

3. Le TMC appliqué au {cylindre extérieur} donne :

$$J \frac{d\omega_2}{dt}(t) = C_r + C$$

En régime permanent, on en déduit :

$$C = -C_r = -4\pi\eta R_2^2 h \frac{R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2}$$

Le couple C est bien négatif puisqu'il s'oppose à la rotation du cylindre imposé par le fluide (le sujet donne donc la valeur absolue de C). L'application numérique donne :

$$\eta = \frac{|C|(R_2^2 - R_1^2)}{4\pi h \omega_1 R_1^2 R_2^2} = 0,09 \text{Pl}$$

Ceci est cohérent avec les valeurs obtenues sur Internet.

Plaque tectonique •◇

1. Gradient horizontal de pression nul $\Rightarrow P$ ne dépend pas de x . Les seules forces verticales agissant sur une particule de fluide dans l'asthénosphère sont les forces de pression et le poids. Par ailleurs, l'accélération de la particule fluide est nulle. D'où :

$$P(z) = P_0 - \rho g(z - h_L)$$

2. Il s'agit d'un écoulement de Couette plan. En reprenant le calcul du cours, on en déduit :

$$v_x(z) = v_0 \frac{z + h_A}{h_A}$$

La contrainte s'exerçant sur la lithosphère vaut :

$$\frac{d\vec{F}}{dS}(z=0) = -\eta \frac{dv_x(z)}{dz}(z=0) \vec{u}_x = -\eta \frac{v_0}{h_A} \vec{u}_x$$

3. La vitesse dans la lithosphère étant constante, le débit volumique vaut :

$$\mathcal{D}_{v,\text{litho}} = v_0 h_L L_y$$

où L_y est une longueur quelconque dans la direction y . Dans l'asténosphère, il faut calculer l'intégrale :

$$\mathcal{D}_{v,\text{asth}} = L_y \int_{-h_A}^0 v_x(z) dz = L_y \frac{v_0 h_A}{2}$$

Le débit total par unité de longueur suivant Oy vaut donc :

$$\frac{\mathcal{D}_v}{L_y} = v_0 \left(h_L + \frac{h_A}{2} \right)$$

4. Pour que le débit volumique à travers une section à x constant soit nulle, il faut nécessairement qu'une partie du fluide aille dans l'autre direction. Seul un gradient de pression horizontal positif peut créer ce mouvement. Pour le déterminer, on applique le principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide. Les projections suivant \vec{u}_x et \vec{u}_z s'écrivent :

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2}(z) = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g = 0 \end{cases}$$

L'intégration de la deuxième équation donne $P(x, z) = -\rho g z + f(x)$. En réintroduisant ceci dans la projection suivant \vec{u}_x , on en déduit :

$$f'(x) = \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2}(z)$$

Cette égalité entre deux fonctions de variables indépendantes étant valable en tout point de l'asthénosphère cela implique que ces deux fonctions sont des constantes. Notons $f'(x) = K$. On en déduit :

$$\eta \frac{d^2 v_x}{dz^2}(z) = K \Rightarrow v_x(z) = K \frac{z^2}{2\eta} + Az + B$$

En utilisant les deux conditions d'adhérence pour la vitesse, on en déduit :

$$v_x(z) = \frac{K}{2\eta} (z^2 + h_A z) + v_0 \left(1 + \frac{z}{h_A} \right)$$

Pour déterminer K , il faut exprimer la nullité du débit :

$$\mathcal{D}_{v,\text{litho}} + \mathcal{D}_{v,\text{asth}} = 0 \Leftrightarrow v_0 h_L + \int_{-h_A}^0 v_x(z) dz = 0$$

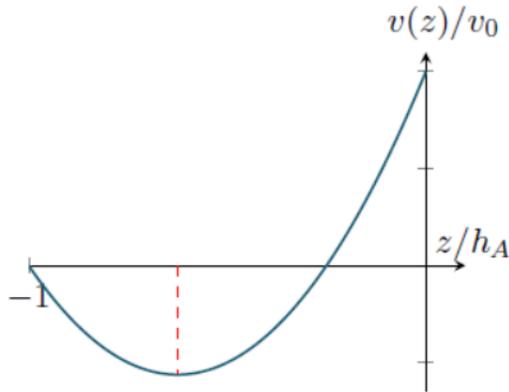
Après calcul, on obtient :

$$K = \frac{2A\eta v_0}{h_A^2}$$

5. L'expression de la vitesse est :

$$v_x(z) = \frac{v_0}{h_A} (z + h_A) \left(1 + \frac{Az}{h_A}\right)$$

La vitesse s'annule en $z = -h_A$ (forcément) et en $z = -\frac{h_A}{A}$. La vitesse maximale de retour est atteinte lorsque $v'_x(z) = 0$, soit en $z = -\frac{h_A}{2A}(A+1)$. Elle vaut : $v_{\text{max}} = -v_0 \frac{(A-1)^2}{4A}$. La forme de la courbe est représentée ci-dessous :



6.

$$\frac{d\vec{F}}{dS}(z=0) = -\eta(A+1) \frac{v_0}{h_A} \vec{u}_x$$

Cette contrainte est plus importante que dans le premier cas.

7. Comprenons d'abord les choses qualitativement. Le gradient de pression horizontal positif implique que la pression sous la lithosphère augmente avec x . En effet, on a :

$$P(x, z) = -\rho g z + \frac{2A\eta v_0}{h_A^2} x + \text{cste}$$

La lithosphère est donc soumise à des forces de pression de plus en plus grandes quand x augmente. Elle aura tendance à s'élever. Pour quantifier cette élévation, on peut effectuer un bilan des forces sur un petit cube de lithosphère de taille $dx \times dy \times h_L$ en $x = 0$ et en $x = L$. On supposera qu'en $x = 0$, la base de la lithosphère est située en $z = 0$, alors qu'en $x = L$, elle est située en $z = \Delta h$. On souhaite évaluer Δh .

L'équilibre du cube en $x = 0$ se traduit par :

$$-\rho g h_L dx dy + P(x=0, z=0) dx dy = 0 \Rightarrow \rho g h_L = \text{cste}$$

L'équilibre du cube en $x = L$ se traduit par :

$$-\rho g h_L dx dy + P(x=L, z=\Delta h) dx dy = 0 \Rightarrow \rho g h_L = -\rho g \Delta h + \frac{2A\eta v_0}{h_A^2} L + \text{cste}$$

d'où une élévation de :

$$\Delta h = \frac{2A\eta v_0}{\rho g h_A^2} L$$

2. Ecoulement de Poiseuille

Viscosimètre**

1. L'invariance par rotation impose que la vitesse ne dépende pas de la coordonnée θ . Par ailleurs, la vitesse étant dirigée suivant \vec{u}_z , l'incompressibilité de l'écoulement impose :

$$\text{div} \vec{v} \Leftrightarrow \frac{\partial v(r, z)}{\partial z} = 0$$

La vitesse en tout point M peut donc s'écrire : $\vec{v}(M) = v(r) \vec{u}_z$.

2. La vitesse est nulle au contact de la paroi à cause de la viscosité. La vitesse diminue quand r augmente et donc $\frac{dv}{dr} < 0$.
3. Cette force faut $\vec{F} = \eta \frac{dv}{dr}(r) S_{\text{cylindre}} \vec{u}_z = \eta \frac{dv}{dr}(r) 2\pi r L \vec{u}_z$. Elle est bien dirigée vers le haut (elle s'oppose à l'écoulement de fluide). Les autres forces intervenant sont :
 - les forces de pression en amont et en aval (par symétrie, les forces de pression sur la face latérale se compensent). Leur résultante vaut $\vec{F}_p = (P_e - P_s) \pi r^2 \vec{u}_z$.
 - le poids valant : $\vec{P} = \mu L \pi r^2 g \vec{u}_z$.

4. Toutes les particules de fluides se déplacent suivant l'axe (Oz). La vitesse du fluide étant constante le long d'une ligne verticale, la vitesse de chaque particule fluide composant le cylindre est constante. Donc la quantité de mouvement du cylindre est constante. Donc la résultante des forces qui s'y applique est nulle. On en déduit :

$$\eta \frac{dv}{dr}(r) 2\pi r L + (P_e - P_s + \mu g L) \pi r^2 = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dr}(r) = -\frac{P_e - P_s + \mu g L}{2\eta L} r$$

5. On en déduit :

$$v(r) = -\frac{P_e - P_s + \mu g L}{4\eta L} (r^2 - R^2)$$

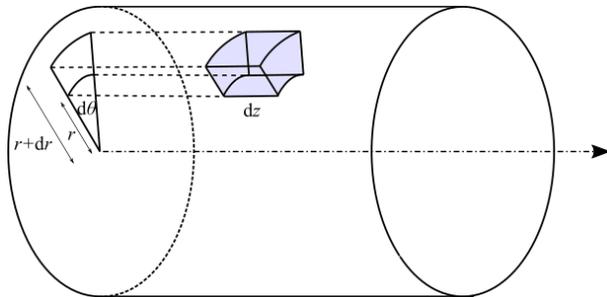
Le profil des vitesses est parabolique.

6. Le calcul du débit volumique donne :

$$\mathcal{D}_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P_{\text{mot}}$$

où $\Delta P_{\text{mot}} = P_e - P_s + \mu g L$ est la variation de pression motrice entre le début et la fin de l'écoulement.

Champ des vitesses et de pression dans un écoulement de Poiseuille



On procède comme dans le cours, seul le système change.

L'étude de la géométrie de l'écoulement indique que $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_z$.

On effectue un bilan des forces sur {une particule de fluide de longueur dz située entre r et $r + dr$ et d'épaisseur $rd\theta$ }. Pour les forces de viscosité, on fera en particulier attention au fait qu'en géométrie cylindrique, les surfaces au dessus et en dessous n'ont pas exactement la même taille, contrairement au cas cartésien.

En cylindrique, le volume d'une particule fluide vaut $dV = dr \times rd\theta \times dz$.

— force exercée par la particule située juste au dessus :

$$\vec{dF}_{r+dr \rightarrow r} = \eta \frac{dv}{dr}(r+dr) dS(r+dr) \vec{u}_z = \eta \frac{dv}{dr}(r+dr) \times (r+dr) d\theta dz \vec{u}_z$$

— force exercée par la particule située juste au dessous :

$$\vec{dF}_{r-dr \rightarrow r} = -\eta \frac{dv}{dr}(r+dr) dS(r) \vec{u}_z = -\eta \frac{dv}{dr}(r) \times r d\theta dz \vec{u}_z$$

— forces de pression :

$$-\vec{\text{grad}}(P) r dr d\theta dz$$

La particule de fluide ayant une vitesse constante, on a :

$$\begin{aligned} -\vec{\text{grad}}(P) r dr d\theta dz + \eta \left(\frac{dv}{dr}(r+dr) \times (r+dr) - \frac{dv}{dr}(r) \times r \right) d\theta dz \vec{u}_z &= 0 \\ \Leftrightarrow -\vec{\text{grad}}(P) r dr d\theta dz + \eta \frac{d}{dr} \left(r \times \frac{dv}{dr}(r) \right) dr d\theta dz &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit (le gradient en coordonnées cylindriques étant toujours fourni dans un énoncé de concours) :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \times \frac{dv}{dr}(r) \right) &= 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations indiquent que P ne dépend ni de r , ni de θ . On en conclut donc :

$$\frac{dP}{dz}(z) = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \times \frac{dv}{dr}(r) \right)$$

A ce stade là, il ne faut surtout pas développer le second membre ! En effet, l'équation ci-dessous est de la forme :

$$f(z) = g(r) \quad \forall r, \forall z$$

où f et g sont des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} . Comme r et z sont des variables totalement indépendantes, cette égalité n'est possible que si f et g sont égales à une même constante K ¹ :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dz}(z) &= K \\ \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \times \frac{dv}{dr}(r) \right) &= K \end{cases}$$

1. Retenez ce raisonnement, nous le reverrons.

La première équation donne l'évolution du champ de pression dans le tube $P(z) = Kz + P_e$. Sachant $P(z = L) = P_s$, on en déduit : $K = \frac{P_s - P_e}{L}$ et

$$P(z) = \frac{P_s - P_e}{L}z + P_e$$

La deuxième équation donne le champ des vitesses : $\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dv}{dr}(r)) = \frac{P_s - P_e}{L}$. En intégrant une première fois, on obtient :

$$\frac{dv}{dr}(r) = \frac{P_s - P_e}{2\eta L}r + \frac{A}{r}$$

En intégrant une second fois, on obtient :

$$v(r) = \frac{P_s - P_e}{4\eta L}r^2 + A \ln r + B$$

La vitesse ne pouvant diverger en $r = 0$, on a forcément $A = 0$ (condition de non adhérence). La condition d'adhérence à la paroi en $r = R$ nous donne B . On trouve :

$$v(r) = \frac{P_s - P_e}{4\eta L}(r^2 - R^2)$$

Résultat cohérent avec le cours.

Puissance dissipée dans un écoulement de Poiseuille •

1. La cerne a un volume $dV = 2\pi r \times L \times dr$. En sommant le volume de toutes les petites cernes dans le cylindre, on obtient :

$$\iiint_{\text{cylindre}} dV = \int_0^R 2\pi r L dr = \pi R^2 L = V_{\text{cylindre}}$$

2. La résultante des forces de pression vaut :

$$d\vec{F} = (P_e - P_s)2\pi r dr \vec{u}_z$$

3. Le champ des vitesses vaut :

$$\vec{v}(r) = \frac{P_e - P_s}{4\eta L}(R^2 - r^2)\vec{u}_z$$

On en déduit l'expression de la puissance dissipée dans la cerne :

$$d\mathcal{P}_{\text{diss}} = d\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{(P_e - P_s)^2}{4\eta L}(R^2 - r^2)2\pi r dr$$

4. Il manquait une question ! Bien entendu, on en déduit l'expression de $\mathcal{P}_{\text{diss}}$ (sans le d du sujet) dans tout le cylindre :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{diss}} &= \int_0^R \frac{(P_e - P_s)^2}{4\eta L}(R^2 - r^2)2\pi r dr \\ &= \frac{2\pi(P_e - P_s)^2}{4\eta L} \int_0^R (rR^2 - r^3) dr \\ &= \frac{\pi R^4 (P_e - P_s)^2}{8\eta L} = \boxed{\frac{(P_e - P_s)^2}{R_H} = R_H^2 \mathcal{D}_V} \end{aligned}$$

On retrouve l'analogie avec la puissance dissipée par effet Joule : $P = RI^2$.

3. Ecoulement autour d'un objet

Mesure de viscosité*

1. Déterminons la vitesse correspondant à un écoulement limite ($\mathcal{R}_e = 2000$) :

$$v_{\text{lim}} = \frac{\mathcal{R}_e \nu}{2R} = \frac{2.10^3 \times 10^{-6}}{1,75.10^{-3}} \approx 1 \text{ m.s}^{-1}$$

Par expérience, la vitesse limite réelle sera bien inférieure à cette valeur (la glycérine est 1000 fois plus visqueuse que l'eau !). L'écoulement sera donc laminaire.

2. On peut choisir un erlenmeyer d'une vingtaine de centimètres de hauteur et de 2 cm de rayon. Ainsi, le mouvement de la bille ne sera pas perturbé par les bords. Une caméra classique enregistre 24 images par seconde. Cela semble amplement suffisant pour suivre le mouvement de la bille.
3. La bille est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de frottements visqueux. On applique la 2nd loi de Newton sur la bille en mouvement :

$$m\vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}_t = \vec{0}$$

en régime permanent. En supposant l'écoulement laminaire, on peut utiliser la loi de Stokes (qui n'est pas à connaître). La projection du PFD sur un axe vertical ascendant donne :

$$-mg + \mu_g V g + 6\pi\eta R v_{\text{lim}} = 0 \Leftrightarrow v_{\text{lim}} = 2 \frac{(\mu_s - \mu_g)R^2 g}{9\eta}$$

Par ailleurs, expérimentalement, on a : $v_{\text{lim}} = \frac{h}{\tau}$. on en déduit donc :

$$\eta = \frac{2(\mu_s - \mu_g)g}{9} \times \frac{R^2 T}{h} = 1,49 \text{ Pl}$$

Concernant l'incertitude, on utilise la formule d'incertitude composée :

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \sqrt{\left(2\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2} = 0,033$$

On en déduit $\eta = 1,49 \pm 0,05\text{Pl}$.

Aviron*

1. $\mathcal{R}_e = \frac{\rho_{\text{eau}}Lv}{\nu} = 5.10^6$ en prenant $L \sim 1$ m la largeur de l'embarcation, $v \sim 20$ km.h⁻¹. On est donc en régime turbulent, où la force de traînée dépend de v^2 .
2. A vitesse constante, le théorème de la puissance cinétique montre que la puissance développée par les rameurs permet de compenser la puissance dissipée par les frottements, c'est-à-dire :

$$P_{\text{rameurs}} = \frac{1}{2}\rho_{\text{eau}}C_xSv^3$$

avec $S = hL$ où h est la hauteur de la barque immergée. Donc si on double la puissance, la vitesse est multipliée par un facteur $2^{\frac{1}{3}} = 1,25$.

3. D'après ce qui précède, on a :

$$\frac{P_{\text{record}}}{P_0} = \left(\frac{v_{\text{record}}}{v_0}\right)^3 \Leftrightarrow P_{\text{record}} = \left(\frac{v_{\text{record}}}{v_0}\right)^3 P_0 \Leftrightarrow P_{\text{record}} = 1,92P_0$$

4. On modélise une barque pouvant contenir n personnes par un bloc de longueur ℓ_n , de largeur L et de hauteur h . On note m_n la masse de l'ensemble {rameurs+barque}. De ce fait, la hauteur immergée h_n pour une barque contenant n personnes vaut :

$$m_n = \rho_{\text{eau}}\ell_n L h_n \Rightarrow h_n = \frac{m_n}{\rho_{\text{eau}}\ell_n L}$$

La puissance développée par n rameurs vaut :

$$P_n = \frac{1}{2}C_x\rho Lh_n v_n^3$$

En supposant que la puissance fournie par 8 rameurs est 8 fois la puissance fournie par un rameur, on obtient :

$$\frac{1}{2}C_x\rho Lh_8v_8^3 \approx 8\frac{1}{2}C_x\rho Lh_1v_1^3$$

$$\frac{v_8}{v_1} \approx \left(8\frac{h_1}{h_8}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \left(8\frac{m_1\ell_8}{m_8\ell_1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Sur Internet, on trouve les informations suivantes² :

- pour un skiff : $\ell_1 = 8\text{m}$, masse du skiff : 20 kg
- pour une barque de 8 personnes : $\ell_8 = 20\text{m}$, masse de la barque : 100 kg.

Pour une masse moyenne par personne de 70 kg, on en déduit :

$$\frac{v_8}{v_1} = \left(8 \times \frac{90 \times 20}{660 \times 8}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,4$$

Les valeurs fournies donnent un rapport un peu plus petit $\frac{v_8}{v_1} = 1,2$. Les ordres de grandeur sont bons. On constate que l'augmentation du nombre de rameurs ne permet pas une augmentation considérable de la vitesse maximale.

A380

1. Pour que l'A380 puisse décoller, il faut que la portance de l'avion soit supérieure au poids. En négligeant le mouvement vertical de l'avion, on obtient :

$$\frac{1}{2}\rho C_z S v^2 > mg \Rightarrow v > \sqrt{\frac{2mgRT}{P_0 M C_z S}}$$

où on a assimilé l'air à un GP : $\rho = \frac{P_0 M}{RT} = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$. On en déduit :

$v > 275 \text{ km.h}^{-1}$. Si la température change de $\Delta T = 20^\circ\text{C}$, la variation relative de vitesse de décollage vaut :

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} = 3\%$$

La vitesse de décollage varie donc de 3% quand la température varie de 6%. Cela qui peut s'avérer non négligeable sur la quantité de carburant à utiliser.

2. *Remarque générale : il peut arriver que vous ayez à traiter un problème sur les forces de traînée/portance en présence de vent. C'est important pour les avions, mais encore plus pour les voiliers. Dans ce cas, la méthode est de toujours se placer dans le référentiel de l'avion \mathcal{R}_a et de calculer la vitesse du vent dans ce référentiel. En effet, les expressions des forces de traînée et de portance font intervenir la vitesse du vent par rapport à la vitesse de l'avion (puisque c'est lui qui est "ressenti" par l'avion).*

2. http://seneffe3y.over-blog.com/pages/Les_différentes_embarcations-1736172.html

Pour cela, on utilisera la loi de composition des vitesses. Si on note $\vec{v}_{\text{vent}, \mathcal{R}_T}$ la vitesse du vent dans le référentiel terrestre, $\vec{v}_{\text{vent}, \mathcal{R}_a}$ la vitesse du vent dans le référentiel de l'avion et \vec{v}_a la vitesse de l'avion, on a :

$$\vec{v}_{\text{vent}, \mathcal{R}_T} = \vec{v}_{\text{vent}, \mathcal{R}_a} + \vec{v}_a \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{\text{vent}, \mathcal{R}_a} = \vec{v}_{\text{vent}, \mathcal{R}_T} - \vec{v}_a}$$

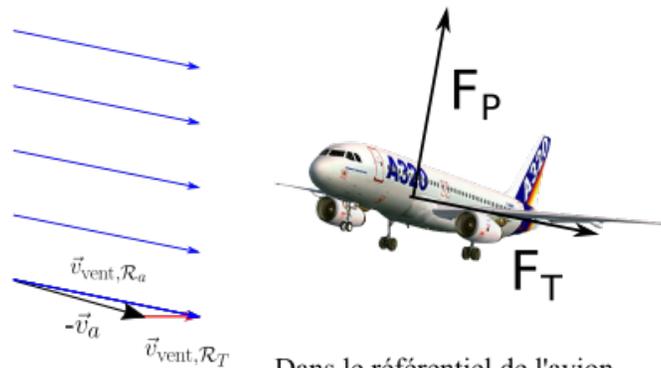
Les forces de trainée/portance vaudront :

$$\begin{cases} \|\vec{F}_T\| &= \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} C_x S v_{\text{vent}, \mathcal{R}_a}^2 \\ \|\vec{F}_P\| &= \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} C_z S v_{\text{vent}, \mathcal{R}_a}^2 \end{cases}$$

La direction des forces changent aussi. La force de trainée est dirigée suivant $\vec{v}_{\text{vent}, \mathcal{R}_a}$ alors que la portance lui est perpendiculaire.



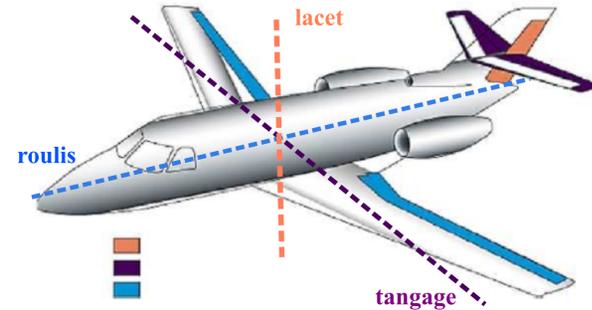
Dans le référentiel terrestre



Dans le référentiel de l'avion

Dans le cas du décollage d'un avion, on comprend alors qu'il vaut mieux avoir un vent de face qu'un vent de derrière. En effet, le vent ressenti par l'avion sera plus important dans le premier cas, ce qui augmente d'autant la force de portance s'exerçant sur l'avion.

3. Les trois axes sont les suivants :

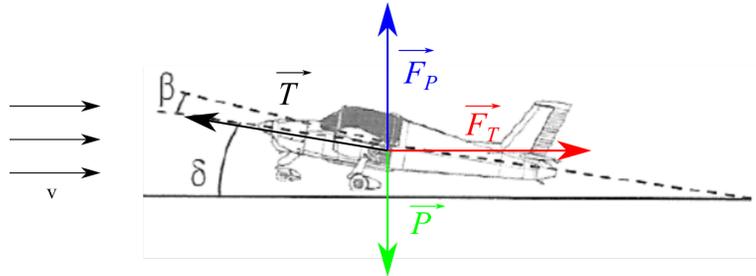


4. La gouverne est le volet en violet. Les volets des ailes (en bleu) servent à incliner l'avion. Le troisième volet (en saumon) sert à faire tourner l'avion.

Avion de tourisme léger

- (a) Concernant la courbe de C_x , on constate qu'elle ne s'annule jamais (on a toujours du frottement quel que soit l'angle de l'aile), mais elle augmente à mesure que la surface de l'aile par rapport au vent augmente (donc pour $-\alpha$ qui augmente). Concernant la courbe de C_z , on constate une évolution quasi-linéaire du C_z jusqu'au décrochage. Ce profil d'aile est intéressant dans la mesure où le coefficient C_z est environ dix fois plus grand que C_x . On a donc une portance élevée avec une traînée faible.

(b) À partir d'un angle d'environ $13-14^\circ$, le coefficient C_z se met à baisser fortement : cela s'explique par un décollement de la couche limite et d'une traînée très turbulente. Par conséquent la force de traînée aura également tendance à augmenter.
- En inclinant l'avion vers l'arrière, on permet d'augmenter l'angle relatif entre le vent, supposé parallèle au sol, et la corde de l'aile, c'est-à-dire l'angle d'incidence $\alpha = \delta + \beta$. D'après la courbe, on peut se placer avant la limite de décrochage, où le coefficient C_z est maximal, c'est-à-dire pour $\alpha = 13^\circ$, donc pour $\delta = 9^\circ$.



Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_T + \vec{F}_P + \vec{T}$$

En projetant suivant l'axe horizontal et l'axe vertical, on obtient :

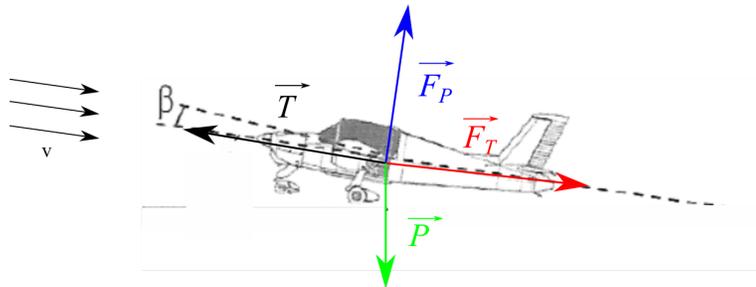
$$\begin{cases} ma_x = -\frac{1}{2}\rho C_x S v^2 + T \cos \delta \\ ma_y = \frac{1}{2}\rho C_z S v^2 - mg + T \sin \delta \end{cases}$$

La vitesse minimale permettant à l'avion de décoller est la vitesse permettant d'avoir uniquement une accélération positive suivant l'axe verticale sans accélération dans le sens du mouvement :

$$\begin{cases} T \cos \delta = \frac{1}{2}\rho C_x S v^2 \\ \frac{1}{2}\rho C_z S v^2 + T \sin \delta > mg \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho(C_z + C_x \tan \delta) S v^2 > mg \Leftrightarrow v > \frac{2mg}{\rho(C_z + C_x \tan \delta) S}$$

On trouve $v \approx 24 \text{ m.s}^{-1}$ (il s'agit d'un avion de tourisme).

3. Par rapport à la situation précédente, le vent arrive avec un angle β par rapport à la corde : c'est donc le coefficient $C_z(\beta)$ qui intervient.



La projection du PFD selon l'axe perpendiculaire à la corde conduit à :

$$-mg \cos \delta + \frac{1}{2}\rho C_z(\beta) S v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mg \cos \delta}{\rho C_z(\beta) S}} = 35 \text{ m.s}^{-1}$$

La puissance développée par le moteur vaut $P = \vec{T} \cdot \vec{v} = T v$. En utilisant la projection du PFD selon l'axe de la corde, on obtient :

$$P = \left(mg \sin \delta + \frac{1}{2}\rho C_x(\beta) S v^2 \right) v = 47 \text{ kW}$$