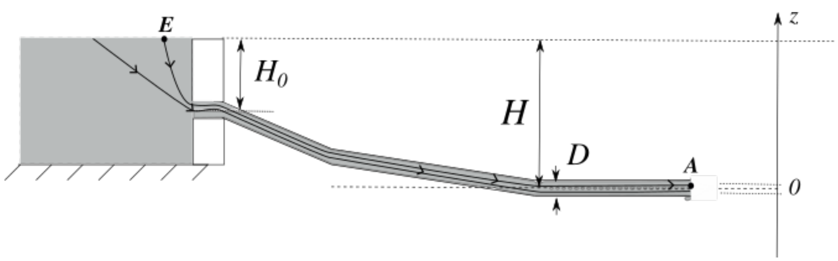
Correction TD n°9

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆ Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Conduite forcée pour une installation hydroélectrique



1. L'écoulement est supposé parfait, le fluide incompressible et le régime permanent. On peut appliquer le théorème de Bernouilli le long d'une ligne de courant commençant au niveau de la surface libre du lac jusqu'à l'embouchure du tuyau (figure ci-dessus) :

$$P_E + \rho g H + \frac{1}{2}\rho v_E^2 = P_A + 0 + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

La surface libre et l'embouchure [1] sont en contact avec l'atmosphère, donc $P_E = P_A = P_0$. Par ailleurs, la surface du lac restant constamment à la même altitude, on a $v_E \approx 0$. On en déduit :

$$v_A = \sqrt{2g(z_E - z_A)} = \sqrt{2gH} = 56\text{m.s}^{-1}$$

2. Le débit volumique dans la conduite étant constant et la section du tube ne variant pas, la vitesse ne peut pas varier dans la conduite : $v_{\text{cond}} = v_A$. Le théorème de Bernoulli le long de la conduite impose donc :

$$P(z) + \rho g z = \text{cste} \quad \text{(dans la conduite)}$$

C'est la même formule qu'en statique. Elle reste valable ici car $v_{\text{cond}} = \text{cste}$. On détermine la constante en utilisant la valeur de la pression en $z = 0$ (cste $= P_0$). D'où :

$$P(z) = P_0 - \rho g z$$

Le phénoméne de cavitation prend place quand $P(z) \approx 0$, soit $z = \frac{P_0}{\rho g} \approx 10\text{m}$.

3. Les conditions du théorème de Bernoulli entre la surface libre du lac et la sortie de l'injecteur n'ayant pas changé, on a toujours $v_S = \sqrt{2gH}$. Par contre, le resserrement de l'injecteur créé un effet Venturi inversé : en A, la vitesse a diminué et la pression a augmenté. En utilisant la conservation du débit, on trouve que la vitesse dans la conduite vaut maintenant :

$$v'_{\text{cond}} = v_S \frac{d^2}{D^2} < v_{\text{cond}}$$

L'injecteur fait donc baisser la vitesse dans la conduite. Le théorème de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de l'injecteur permet de déterminer la nouvelle pression P'_A en A :

$$P'_A + \frac{1}{2}\rho {v_{\text{cond}}}^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho {v'_S}^2$$
$$\Rightarrow P'_A = P_0 + \rho g H \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) > P_0$$

Par ailleurs, on a toujours le long de la conduite :

$$P'(z) + \rho g z = \text{cste}$$

1. Pour l'embouchure, cela devrait être précisé plus clairement dans l'énoncé !

avec cette fois cste $= P'_A$, soit :

$$P'(z) = P_0 + \rho g H \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) - \rho g z$$

Il y aura cavitation quand :

$$z = \frac{P_0}{\rho g} + H\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

La conduite ne sera pas détériorée si $z > H - H_0$ ce qui donne après calcul :

$$d < d_0 \ \text{avec} \ d_0 = D\left(\frac{P_0}{\rho g H} + \frac{H_0}{H}\right)^{\frac{1}{4}} = 13\text{cm}$$

4. On prend $d = 15$ cm (donc il y a cavitation au début de la conduite...). La vitesse d'éjection vaut $v_S = 56\text{m.s}^{-1}$. Le débit vaut $Q_v = v_s \pi \frac{d^2}{4} = 1\text{kg.m}^{-3}$. La puissance cinétique du jet vaut :

$$\mathscr{P}_c = e_c \mathscr{D}_m = \frac{1}{2} v_s^2 \rho Q_v = P_{\text{dyna}} Q_v$$

Étude simplifiée d'un barrage

1. On souhaite utiliser le diagramme de Moody. On calcule donc le nombre de Reynolds $R_e = \frac{\rho L v}{\eta} = 2.10^6$. Avec une rugosité relative de $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D} = 3,3.10^{-4}$, une lecture graphique conduit à $\lambda \approx 1,5.10^{-2}$. Donc les pertes de charges régulières par unité de longueur valent :

$$\Delta P_{\text{reg}} = \frac{\lambda \rho v^2 L}{2D} = 4,7.10^4 \text{Pa}$$

ce qui correspond, pour $g = 10\text{m.s}^{-2}$, à une différence de hauteur d'eau de 4,7 mètres.

2. En appliquant la formule de pertes de charges singulières :

$$\Delta P_{\text{coude}} = K\frac{v^2}{2} = 9,7.10^3 \text{Pa}$$

ce qui correspond, pour $g = 10\text{m.s}^{-2}$, à une différence de hauteur d'eau de 97 cm. La perte de charge singulière (qui se créé sur une distance de l'ordre du mètre) est de l'ordre de 20% de la perte de charge régulière (qui se créé sur une distance de 1,5km).

3. On applique la non-conservation de l'énergie mécanique sur une ligne de courant entre A et B ("théorème de Bernoulli en présence de pertes de charges") :

$$\left(P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B\right) - \left(P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A\right) = -\Delta P_{\text{reg}} - \Delta P_{\text{coude}}$$

On en déduit : $\boxed{P_A = 90,7\text{bar}}$.

4. Si on applique un bilan d'énergie entre B et C (ou "théorème de Bernoulli avec échange de travail"), on obtient :

$$P_0 - \left(P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2\right) = -\eta P_m D_v$$

On isole P_m pour trouver :

$$\boxed{P_m = \frac{1}{\eta D_v}\left(P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 - P_0\right) = 171\text{MW}}$$

Clapet à eau•

1. On définit d'abord le système fermé ($\Sigma^\star$) étudié :
   - à l'instant t il contient la plaque, le fluide situé entre A' et les bords de la plaque et la masse 1 contenue entre A et A'.
   - à l'instant $t + \mathrm{d}t$, il contient la plaque, le fluide situé entre A' et les bords de la plaque, et les masses 2 et 3 qui sont sorties entre t et $t + \mathrm{d}t$.

   On évalue ensuite le moment cinétique suivant l'axe Δ du système étudié :
   - A la date t : $L_{\Delta,\Sigma^\star}(t) = L_{\text{plaque+eau}}(t) + \delta m h v_0$,
   - A la date $t + \mathrm{d}t$: $L_{\Delta,\Sigma^\star}(t + \mathrm{d}t) = L_{\text{plaque+eau}}(t + \mathrm{d}t)$

   Les moments cinétiques des masses 2 et 3 sont négligeables.

> Remarque : pour calculer le moment cinétique par rapport à un axe Δ d'une petite masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$, on peut utiliser la définition du moment cinétique pour un point matériel ou bien utiliser le théorème du bras de levier. Pour le moment cinétique, il s'écrit :
>
> $$L_z = \pm d(\vec{v}) m ||\vec{v}||$$
>
> où $d(\vec{v})$ est la distance entre la droite d'action du vecteur $\vec{v}$ et l'axe de rotation.

Enfin, on effectue un bilan des moments et des couples s'exerçant sur le système. Seul le poids de la plaque intervient ici (la liaison est supposée idéale, et, la pression étant uniforme, la résultante des moments des forces de pression est nulle). Le théorème du bras de levier donne alors :

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = -\frac{1}{2}Mg\ell\sin\alpha$$

L'application du théorème du moment cinétique en régime permanent donne donc :

$$-\mathscr{D}_m h v_0 = -\frac{1}{2}Mg\ell\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\mu s h v_0^2}{Mg\ell}$$

On note que la dépendance en v_0 ou en h est conforme à notre sens physique, s'ils augmentent, α augmente. De même pour M et ℓ.

2. Par conservation du débit, on a la première relation :

$$e v_0 = e_2 v_2 + e_3 v_3$$

Le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant implique que :

$$P + \mu g z + \frac{1}{2}\mu v^2 = \text{cste}$$

Si on néglige l'influence de la pesanteur, sachant que la pression est uniforme dans le système, on en déduit que $v = \text{cste}$. On a donc $e = e_2 + e_3$. On applique maintenant un bilan de quantité de mouvement au système fermé $\Sigma^\star$ formé uniquement par l'eau. En notant Σ le système formé de l'eau situé entre A' et les bords de la plaque, on a :

— A la date t : $\vec{p}_{\Sigma^\star}(t) = \vec{p}_\Sigma(t) + \delta m \vec{v}_0$,

— A la date $t + \mathrm{d}t$: $\vec{p}_{\Sigma^\star}(t+\mathrm{d}t) = \vec{p}_\Sigma(t+\mathrm{d}t) + (\delta m_2 \vec{v}_2 + \delta m_3 \vec{v}_3)$,

Les forces appliquées au système sont :

— la force de réaction exercée par la plaque sur l'eau : $\vec{F}_{\text{plaque} \to \text{eau}}$. Le fluide étant parfait, il n'accroche pas à la paroi (pas de frottements). La force de réaction n'a donc pas de composante tangentielle est elle est dirigée suivant le vecteur $-\vec{n}$.

— la force exercée par la pression atmosphérique $\vec{F}_P$. En utilisant le fait que la résultante des forces de pression sur une surface fermée est nulle lorsque la pression est uniforme (cf statique des fluides), on en déduit $\vec{F}_P = -P_0 \ell L \vec{n}$.

— le poids du fluide est négligé.

Le bilan de quantité de mouvement appliqué au système en régime permanent donne donc :

$$\delta m_2 \vec{v}_2 + \delta m_3 \vec{v}_3 - \delta m \vec{v}_0 = \vec{F}_{\text{plaque}\to\text{eau}} - P_0 \ell L \vec{n}$$

La projection de cette relation sur l'axe $\vec{u}$ donne :

$$e_2 - e_3 + e\sin\alpha = 0$$

On en déduit :

$$e_2 = \frac{e}{2}(1+\sin\alpha) \quad e_3 = \frac{e}{2}(1-\sin\alpha)$$

L'épaisseur e_3 est supérieure à e_2, c'est logique car le fluide de la partie 2 a subi une plus grande variation de quantité de mouvement que celui de la partie 3, car il rebroussse chemin ! Attention, ce n'est pas ici un effet de gravité, que l'on a négligé !

Perte de charge singulière dans un écoulement

1. Notons S_{lat} la surface latérale du volume de contrôle. Les forces de pressions s'exerçant sur cette surface valent :

$$\vec{F} = P_1 S_1 \vec{u}_x - P_2 S_2 \vec{u}_x - \iint_{S_{\text{lat}}} P_1 \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

La dernière intégrale (n.b les vecteur $\vec{\mathrm{d}S}$ sont orientés dans le sens sortant) peut se calculer en ”fermant” la surface latérale :

$$\iint_{S_{\text{lat}}} P_1 \overrightarrow{\mathrm{d}S} - P_1 S_1 \vec{u}_x + P_1 S_2 \vec{u}_x = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\vec{F} = (P_1 - P_2) S_2 \vec{u}_x$$

2. En effectuant un bilan classique de quantité de mouvement, on trouve :

$$\mathscr{D}_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = \mathscr{D}_m(v_2 - v_1)\vec{u}_x$$

3. En identifiant les deux expression, on en déduit :

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{S_2}\mathscr{D}_m(v_2 - v_1) = \mu v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - \frac{S_1}{S_2}\right)$$

La perte de charge totale entre l'entrée et la sortie s'écrit :

$$\Delta P = P_1 + \frac{1}{2}\mu v_1^2 - P_2 - \frac{1}{2}\mu v_2^2 = \frac{1}{2}\mu v_1^2 \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

(Attention à la notation ΔP qui ne dénote pas une différence de pression mais bien une différence de perte de charge). On retrouve l'expression de la perte de charge singulière en présence d'un élargissement brusque fourni dans le Powerpoint.