DS n°3

PSI 2021/2022

Durée 4 heures - Calculatrices **autorisées**

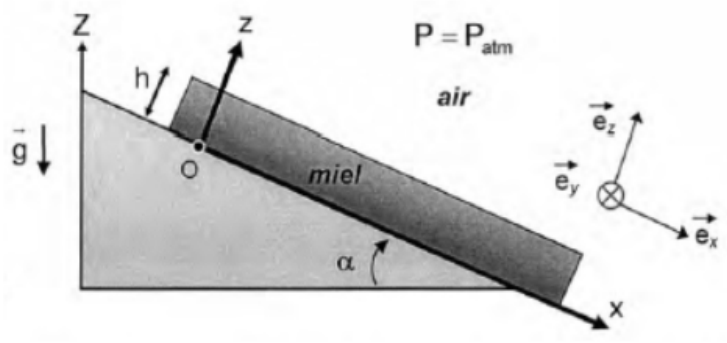
Mécanique des fluides - Chimie

I. — Ecoulement d'un glacier

Un glacier est une masse de glace qui se forme par le tassement de couches de neige accumulées ; écrasée sous son propre poids, la neige expulse l'air qu'elle contient, se soude en une masse compacte et se transforme en glace. Du fait de sa plasticité, un glacier s'écroule lentement sous l'effet de la gravité le long d'une pente avec une vitesse d'écoulement très variable selon la pente, la topographie du lit rocher ou l'épaisseur de la glace. Sa vitesse moyenne est de l'ordre de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres par jour, le record revenant au glacier Kangerlussuaq dans le Groenland, où la vitesse moyenne atteinte est de 14 kilomètres par an.

Etude préliminaire

Intéressons-nous à l'écoulement d'un fluide visqueux, par exemple une couche de miel sur une plaque plane inclinée. Une couche d'épaisseur constante h d'un fluide visqueux newtonien incompressible, de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ s'écoule dans le champ de pesanteur supposé uniforme, sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.



Le support plan incliné a pour équation $z = 0$ et la surface libre correspond à $z = h$. Les forces de viscosité exercées par l'air sur la surface supérieure de la couche de miel sont négligées. À l'interface air-miel, la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique. Les dimensions du système dans les directions (Ox) et (Oy) sont très supérieures à l'épaisseur h de la couche de miel. Dans la suite, on suppose que l'écoulement est réalisé en régime permanent.

❑ **1** — Montrer qu'en écoulement stationnaire unidirectionnel, le champ des vitesses s'écrit sous la forme $\vec{v}(M) = v(z)\vec{u}_x$.

❑ **2** — En appliquant la loi de la quantité de mouvement à un système bien défini, montrer rigoureusement que le champ de pression P et le champ de vitesse vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} & = \rho g \sin\alpha + \eta \dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} & = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} & = -\rho g \cos\alpha \end{cases}$$

❑ **3** — Déterminer le champ de pression dans tout l'écoulement.

❑ **4** — Préciser, en justifiant, quelles sont les conditions aux limites vérifiées par le champ de vitesse en $z = 0$ et en $z = h$.

❑ **5** — En déduire que le champ de vitesse s'écrit

$$\vec{v} = \frac{g \sin\alpha}{\nu} z \left(h - \frac{z}{2}\right) \vec{u}_x$$

en donnant l'expression de ν et en précisant sa dimension.

❑ **6** — Représenter le champ des vitesses de cet écoulement, en respectant sa configuration géométrique.

❑ **7** — Montrer que le débit volumique pour une profondeur b selon $\vec{e}_y$ s'écrit :

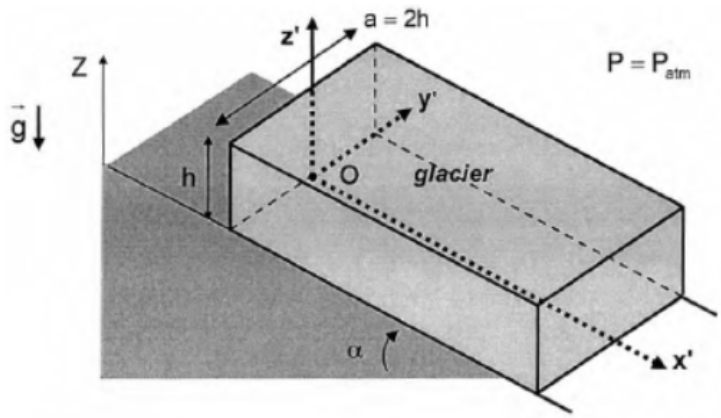
$$\mathscr{D}_v = g \sin\alpha\, b \frac{h^3}{3\nu}$$

❑ **8** — Déterminer la position où la vitesse est maximale et exprimer sa valeur $v_{\max}$. Exprimer également la vitesse moyenne dans l'écoulement en fonction de $v_{\max}$.

❑ **9** — Définir le nombre de Reynolds en explicitant son sens physique. L'exprimer en fonction des paramètres du problème et effectuer une application numérique pour $h = 3,0$ mm, $\alpha = 10°$, $\rho = 1,4.10^3$ kg.m^{-3} et $\eta = 10$ Pa.s. Conclure.

Dynamique d'un glacier

Les mouvements d'un glacier peuvent être modélisés par l'écoulement d'un fluide newtonien extrêmement visqueux. Afin d'adopter une géométrie simple, la vallée glaciaire est assimilée à une canalisation de section rectangulaire en forme de U dont le fond est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. La masse de glace occupant cette vallée possède une largeur moyenne a et une épaisseur moyenne h, avec $a = 2h$.



Compte tenu de la géométrie proposée, la nouvelle répartition de la vitesse dans les couches de glace s'écrit $\vec{v}(M) = v(y,z)\vec{e}_x$.

❑ **10** — Établir, à partir des résultats déjà obtenus dans l'étude préliminaire, l'équation différentielle vérifiée par le champ de vitesses en régime permanent.

Afin de simplifier la description de cet écoulement, réalisons les changements de variables suivants $y = ay'$, $z = az'$: les grandeurs y' et z' sont alors adimensionnées.

❑ **11** — Transformer l'équation différentielle précédente en introduisant une vitesse caractéristique v_0 en posant $v = v_0 v'$ de façon à obtenir une équation différentielle adimensionnée en $v'(y', z')$ pouvant s'écrire :

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + 1 = 0$$

Expliciter v_0.

❑ **12** — Préciser les conditions aux limites vérifiées par la solution $v'(y', z')$ en $z' = 0$ et $y' = \pm 1/2$, puis par sa dérivée $\dfrac{\partial v'}{\partial z'}$ en $z' = 1/2$.

❑ **13** — La résolution informatique de cette équation différentielle permet d'obtenir le tracé de v' en fonction de y' pour différentes valeurs du paramètre z' compris entre 0 et 1/2 (figure 1). Évaluer la valeur maximale $v_{\max}$ atteinte par la valeur adimensionnée v' à la surface supérieure du glacier.

❑ **14** — De tout temps, les glaciologues ont tenté d'évaluer la déformation des glaciers et leur écoulement (autrefois à l'aide de pierres posées sur le glacier, plus récemment à l'aide de balises GPS et par interférométrie radar). Établie pour le glacier du Rhône près du col de la Furka dans le Valais suisse, la figure 2 présente, en superposition à une carte IGN, l'évolution d'une ligne d'environ 50 balises au cours d'une décennie (années référencées A, A + 1, etc.) À l'instant de référence (année A), les balises sont alignées sur la largeur a du glacier, entre deux moraines latérales.

❑ **15** — Estimer le déplacement de la balise centrale sur la durée de 9 années. Calculer la vitesse moyenne de déplacement en m/an, puis dans une unité appropriée par seconde.

❑ **16** — Déterminer puis calculer la viscosité cinématique de la glace. Commenter.

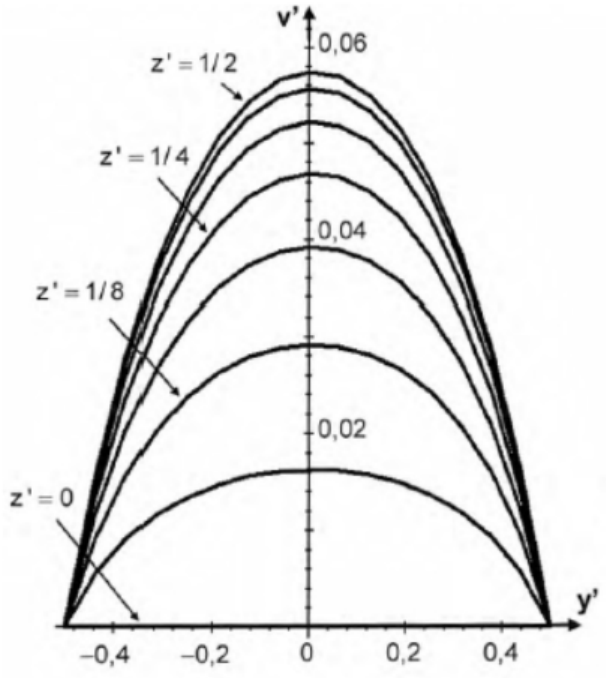


FIGURE 1 – *Tracé de la vitesse adimensionnée v' en fonction de y'.*

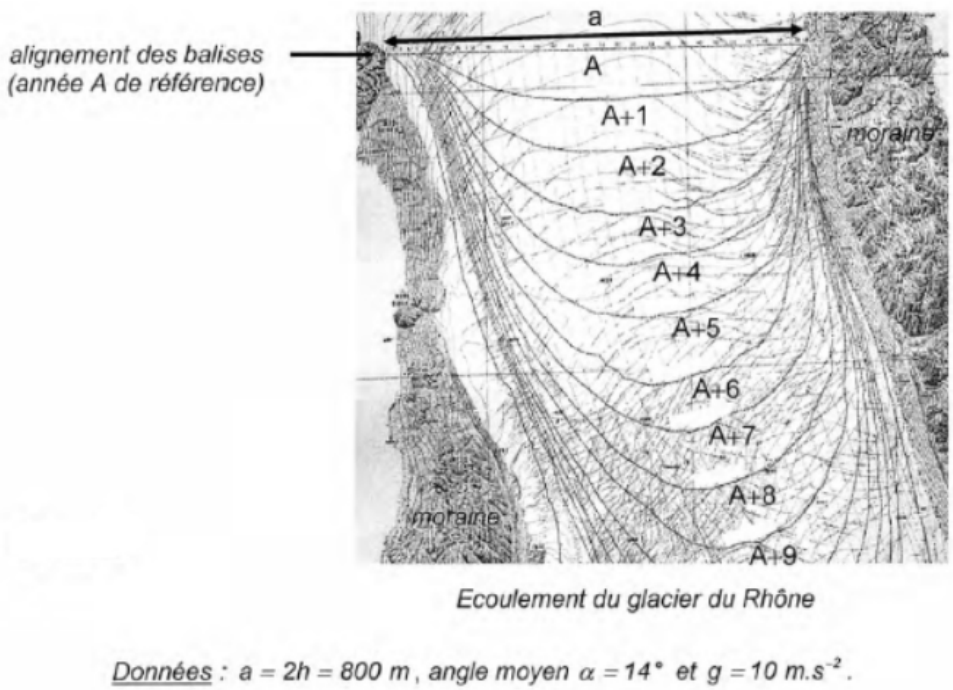
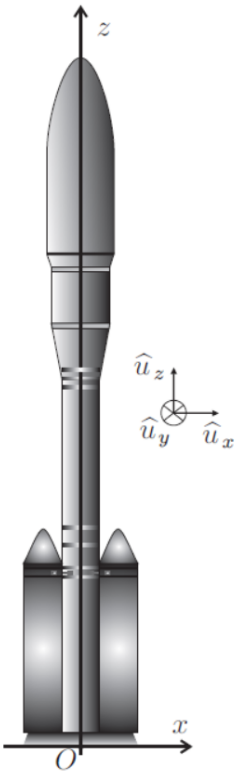


FIGURE 2 – *Ecoulement du glacier du Rhône*

II. — Propulsion spatiale



A l'instant $t = 0$, une fusée de masse totale m_0 décolle verticalement dans le référentiel terrestre (voir ci-contre). On définit le débit de masse $D_m > 0$ des gaz brûlés, par $D_m = -\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, $m(t)$ désignant la masse de la fusée à un instant $t > 0$ quelconque. On note $\vec{u} = -u\vec{u}_z$ avec $u > 0$, la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. On note $\vec{v} = v(t)\vec{u}_z$ la vitesse de la fusée dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que D_m et u restent constants et que le champ de pesanteur g reste uniforme lors du lancement.

❑ **1** — En prenant pour système la fusée à l'instant t, exprimer sa quantité de mouvement $\vec{p}_f$ aux instants t et $t + \mathrm{d}t$. Déterminer de même la quantité de mouvement $\vec{p}_g$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$ du gaz éjecté pendant $\mathrm{d}t$.

❑ **2** — On rappelle que la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{w}(t)$ est définie par la relation $\dfrac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}(t) = \lim\limits_{\mathrm{d}t \to 0} \dfrac{\vec{w}(t+\mathrm{d}t) - \vec{w}(t)}{\mathrm{d}t}$. En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour l'ensemble {fusée + gaz}, établir l'équation différentielle :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = D_m u - mg$$

❑ **3** — Identifier, dans le second membre de l'équation ci-dessus, l'intensité F de la force de poussée. A quelle condition la fusée décolle-t-elle ?

❑ **4** — On nomme impulsion spécifique I_s d'un ergol (gaz propulseur) le temps pendant lequel une masse m de cet ergol peut fournir une poussée équivalente au poids ressenti par m à la surface de la terre. Exprimer I_s en fonction de u et g.

❑ **5** — Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la fusée à l'instant t, en fonction de t, $m(t)$, g, u et de la masse de la fusée à l'instant $t = 0$ notée m_0.

❑ **6** — On suppose le vaisseau extrait de l'attraction terrestre (mission interplanétaire), sa masse totale est alors m_i et sa vitesse $\vec{v}_i = v_i\vec{u}_z$. On allume à nouveau un moteur pendant une durée Δt conduisant à une variation de masse $\Delta m = m_i - m_f$. Adapter l'expression précédente pour obtenir la relation de Tsiolkovski donnant l'accroissement de vitesse correspondant, noté $\Delta v = v_i - v_f$, en fonction de u, m_i et m_f.

L'exemple qui suit a pour objet de montrer l'intérêt des fusées à plusieurs étages. Soit une fusée de masse totale $m_t = 134$ tonnes constituée de deux étages. La masse totale du premier étage est $m_{t1} = 110$ tonnes dont 100 tonnes d'ergols, et celle du second est $m_{t2} = 24,0$ tonnes dont 20,0 tonnes d'ergols.

❑ **7** — En considérant que la vitesse d'éjection des gaz u =4,0 km.s^{-1} est la même lors de la poussée de chaque étage, calculer les accroissements de vitesse apportés successivement par chacun des étages de la fusée. Comparer avec le cas d'une fusée ne possédant qu'un seul étage et la même répartition de masses, c'est-à-dire 14,0 tonnes de structure et 120 tonnes d'ergols. Les calculs seront effectués dans l'hypothèse d'une absence de pesanteur.

Une autre manière de minimiser les dépenses en carburant est d'augmenter la vitesse d'éjection, limitée à quelques kilomètres par seconde dans le cas d'une propulsion chimique.

❑ **8** — Pour une charge utile de masse $m_u = 500$ kg, calculer les masses m_{c1} et m_{c2} de carburant (la masse initiale du vaisseau est $m_0 = m_u + m_c$) à prévoir pour obtenir une variation de vitesse $\Delta v = 5,0$ km.s^{-1}, dans le cas d'une propulsion chimique ($u = 4,0$ km.s^{-1}) et d'une propulsion ionique ($u = 20,0$ km.s^{-1}).

III. — Fonctionnement d'une éolienne

On considère une éolienne assimilée à ses pales qui récupèrent une puissance mécanique $\mathscr{P}_m$ provenant de l'écoulement de l'air avoisinant.

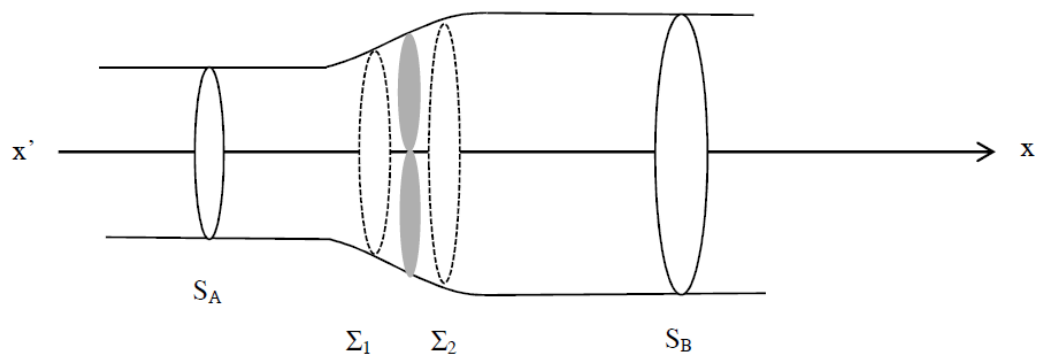


FIGURE 3 – *Pales de l'éolienne et tube de courant*

L'étude est faite dans le référentiel terrestre supposé galiléen où les pales sont animées d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe $x'x$ de vecteur unitaire $\vec{e}_x$ (figure 1).

Les effets de la pesanteur sont négligeables. L'air est assimilé à un gaz parfait. L'écoulement de l'air autour des pales est supposé stationnaire, parfait, homogène et incompressible et à symétrie de révolution autour de l'axe $x'x$. On note ρ la masse volumique de l'air. La figure 1 représente le tube de courant passant par les extrémités des pales de l'hélice.

La vitesse de l'air est supposée uniforme sur une section perpendiculaire au tube de courant. Elle vaut respectivement : $\vec{V}_A = V_A\vec{e}_x$, sur la section S_A située loin en amont des pales et vaut $\vec{V}_B = V_B\vec{e}_x$, sur la section S_B située loin en aval des pales. A grande distance des pales, en amont ou en aval, la pression de l'air est égale à la pression atmosphérique P^0 et la température égale à T_0.

Les sections Σ_1 et Σ_2, situées au voisinage immédiat des pales, l'une en amont et l'autre en aval, ont leurs aires quasiment identiques. De sorte que l'on supposera $\Sigma_1 = \Sigma_2 = S$, au premier ordre. La pression du fluide est supposée uniforme sur chacune de ces sections et vaut P_1 sur Σ_1 et P_2 sur Σ_2.

Au voisinage des pales, il y a continuité de la composante normale, (suivant $\vec{e}_x$) de la vitesse de l'air. Cette composante sera notée $\vec{V} = V\vec{e}_x$. On néglige la dissipation d'énergie par frottement de l'air le long des pales.

On cherche dans ce problème à exprimer la puissance $\mathscr{P}_m > 0$ récupérable par l'éolienne.

❑ **1** — Ecrire, en les justifiant, deux relations liant tout ou partie de ces grandeurs : S_A, V_A, S_B, V_B, S et V.

❑ **2** — Rappeler les conditions de validité du théorème de Bernoulli. Exprimer les pressions P_1 et P_2 en fonction de P^0, ρ, V_A, V_B et V.

❑ **3** — En effectuant un bilan d'énergie sur le tube de courant délimité par les deux sections droites S_A et S_B, exprimer la relation liant ρ, V_A, V_B, V, S et $\mathscr{P}_m$. On appelera cette relation la relation (E).

❑ **4** — On admettra que la résultante des forces de pression sur le tube est nulle. En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur le tube de courant délimité par les deux sections droites S_A et S_B, établir que l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par l'écoulement sur l'éolienne vaut :

$$\vec{F} = \rho V S(\vec{V}_A - \vec{V}_B)$$

On appelera cette relation la relation (F).

❑ **5** — En combinant (E) et (F), montrer que :

$$V = \frac{V_A + V_B}{2}$$

❑ **6** — En déduire une expression de $\mathscr{P}_m$ ne faisant intervenir que V_A, V_B, ρ et S.

❑ **7** — On pose $x = \dfrac{V_B}{V_A}$. Pour quelle valeur de x, $\mathscr{P}_m$ est-elle maximale ? Exprimer cette valeur maximale en fonction de ρ, S et V_A.

❑ **8** — Application numérique :

a) Evaluer la puissance maximale récupérable par une éolienne dont les pales ont un diamètre $D = 60$ m pour une vitesse du vent de 40 km.h^{-1}

b) Combien faudrait-il d'éolienne de ce format, dans les mêmes conditions météorologiques pour produire la même puissance qu'une tranche de centrale nucléaire de 1 500 MW ?

IV. — Chimie

IV.A. — Eutrophisation

Lorsqu'un milieu aquatique reçoit trop de matières nutritives assimilables par les algues, celles-ci prolifèrent (**photo 1**). *L'eutrophisation peut aboutir à la mort des d'organismes vivants par asphyxie.*

Photo 1 - Eutrophisation

Un procédé de lutte contre l'eutrophisation consiste à réduire la teneur en phosphore des eaux rejetées par un ajout suffisant de chlorure de magnésium $MgCl_{2(s)}$, supposé entièrement soluble dans l'eau (Mg^{2+},$2Cl^-$). Le phosphore précipite alors sous forme de struvite de formule $MgPO_4NH_4(s)$ suivant l'équation bilan :

$$Mg^{2+}_{(aq)} + PO_{4\ (aq)}^{3-} + NH_{4(aq)}^{+} = MgPO_4NH_{4(s)}$$

On considère un effluent aqueux contenant initialement $C_P = 5 \cdot 10^{-3}$ mol· L^{-1} de phosphore et $C_N = 16 \cdot 10^{-3}$ mol. L^{-1} d'azote ammoniacal. Le pH de cet effluent est maintenu à 9,3.

Le phosphore peut être présent sous les formes suivantes : H_3PO_4, $H_2PO_4^-$, HPO_4^{2-}, PO_4^{3-}. L'azote ammoniacal peut être présent sous les formes NH_4^+ et NH_3.

On suppose que l'hydroxyde de magnésium ($Mg(OH)_{2(s)}$) ne se forme pas.

On se propose de déterminer la masse minimale de chlorure de magnésium à ajouter dans 1 m^3 d'effluent pour faire apparaître le précipité de struvite.

Q13. Préciser sous quelles formes prépondérantes se trouvent le phosphore et l'azote ammoniacal dans cet effluent. Préciser les concentrations de ces différentes espèces prépondérantes.

Q14. Déterminer la concentration minimale de Mg^{2+} pour laquelle le précipité de struvite apparaît.

Q15. En déduire la masse minimale de chlorure de magnésium à ajouter dans 1 m^3 d'effluent pour faire apparaître le précipité de struvite.

Données thermodynamiques :

H_3PO_4 est un triacide dont les constantes d'acidité sont : $pK_{a1} = 2{,}1$; $pK_{a2} = 7{,}2$; $pK_{a3} = 12{,}3$.
Constante d'acidité du couple (ion ammonium, ammoniac) : $pK_a = 9{,}3$.
Réaction de solubilité de la struvite :

$$MgPO_4NH_4(s) = Mg^{2+}(aq) + PO_4^{3-}(aq) + NH_4^+$$

Produit de solubilité de la struvite : $K_s = 10^{-11}$
Masse molaire : $M(MgCl_2) = 95$ g.mol^{-1}

IV.B. — L'oxygène

L'oxygène est présent dans l'atmosphère (où la fraction molaire en dioxygène est très proche de 21%), dans les océans et dans la croûte terrestre dont il est le principal élément.

❑ **1** — L'oxygène constitue 86,0% de la masse de l'eau de mer. Que vaut le pourcentage massique en oxygène de l'eau pure ? On donne $M(O) = 16{,}0$g.mol^{-1} et $M(H) = 1{,}01$ g.mol^{-1}.

❑ **2** — En déduire la teneur globale, exprimée en g.L^{-1} de l'ensemble des autres constituants de l'eau de mer. On précise que la densité de l'eau de mer vaut $d = 1{,}03$

L'oxygène peut être conditionné en bouteille sous forme gazeuse à une pression de 200 bar ; on le trouve également stocké sous forme liquide.

❑ **3** — Pour un volume V donné de contenant, évaluer le rapport

$$r = \frac{\text{masse de dioxygene gazeux a 200 bar}}{\text{masse de dioxygène liquide à 20 °C}}$$

des masses de dioxygène contenu dans un même volume, suivant qu'il est liquide (à 20 °C) ou gazeux (à 200 bar et 20 °C). On assimilera le dioxygène gazeux à un gaz parfait. On donne $\rho_{O_2,\ell} = 1140\text{kg.m}^{-3}$. Commenter le résultat.

Dans les avions de transport de passagers, les masques à oxygène peuvent être reliés à des générateurs chimiques contenant du chlorate de sodium solide, de formule $NaClO_3$. Celui-ci se décompose en chlorure de sodium NaCl et en dioxygène selon la réaction :

$$NaClO_3(s) \rightarrow NaCl(s) + \frac{3}{2}O_2(g) \tag{1}$$

Pour maintenir une vitesse de réaction suffisante, le chlorate de sodium doit être porté à 300 °C ; on ajoute donc du fer en poudre, dont l'oxydation produit la chaleur nécessaire. L'oxydation du fer s'écrit :

$$2\,Fe(s) + \frac{3}{2}O_2(g) \rightarrow Fe_2O_3(s) \tag{2}$$

Les enthalpies libres standard (en kJ.mol^{-1}) de ces réactions dans le cadre de l'approximation d'Ellingham en fonction de la température (en K) sont respectivement : $\Delta_r G_1^0(T) = -45,6 - 0,275T$ et $\Delta_r G_2^0(T) = -824 + 0,220T$.

❑ **4** — Les réactions (1) et (2) sont-elles endo ou exothermiques ? Justifier.

❑ **5** — Définir la variance et donner sa valeur pour la réaction (2).

❑ **6** — Discuter de l'influence de la température sur l'état d'équilibre des réactions (1) et (2).

❑ **7** — Justifier le signe des coefficients directeurs de $\Delta_r G_1^0(T)$ et de $\Delta_r G_2^0(T)$.

❑ **8** — Quelle relation y-a-t-il entre la variation d'enthalpie Q_P du système réactionnel dans les conditions isothermes et isobares, l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^0$ et l'avancement de la réaction ξ ?

❑ **9** — Rappeler l'expression de la constante d'équilibre d'une réaction en fonction de l'enthalpie libre standard de réaction et de la température.

❑ **10** — Justifier que chacune des réactions (1) et (2) est totale dans les conditions d'utilisation des générateurs chimiques (on admettra qu'ils produisent une pression partielle de dioxygène de l'ordre de 0,7 bar).

❑ **11** — On suppose que la chaleur Q_P dégagée par la réaction (1) à 300 °C permet de chauffer adiabatiquement à une température T_f du chlorate de sodium, initialement seul à 20 °C, en quantité égale à celle consommée par la réaction (1). Déterminer T_f. Conclure quant à l'utilisation du fer.

Données :
- Capacité thermique massique de $NaClO_3$: 983 $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.
- Masse molaire de $NaClO_3$: 106,4 g.mol^{-1}