

CORRECTION DS n°3

PSI 2021/2022

Durée 4 heures - Calculatrices **autorisées**

Mécanique des fluides - Chimie

I. — Ecoulement d'un glacier

□ 1 — Le problème est invariant par translation suivant y , donc on peut chercher un champ de vitesses de la forme $\vec{v} = v(x, z)\vec{e}_x$. Puis comme l'écoulement est incompressible, $\text{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ donc le champ de vitesses ne dépend pas de x , c'est-à-dire $\vec{v} = v(z)\vec{e}_x$

□ 2 — On est en régime stationnaire, appliquons la loi de la quantité de mouvement à une particule de fluide de volume $d\tau$ dans le référentiel du plan incliné, supposé galiléen. Comme la particule ne se déplace que suivant l'axe $\vec{e}_x$, son accélération est nulle. Elle est soumise aux forces de pression et aux deux forces de cisaillement en z et $z + dz$:

$$\vec{0} = -\vec{\text{grad}}P d\tau + \rho \vec{g} d\tau + \eta dx dy \left(\frac{dv}{dz} \right)_{z+dz} \vec{e}_x - \eta dx dy \left(\frac{dv}{dz} \right)_z \vec{e}_x$$

En projetant cette équation dans la base considérée, on obtient bien le système demandé.

□ 3 — D'après ces équations, le champ de pression dépend de x et z uniquement. On intègre l'équation suivant $\vec{e}_z$, on a donc $P(x, z) = -\rho g \cos \alpha z + f(x)$. Avec la condition aux limites $P(x, z = h) = P_{\text{atm}} \forall x$ $f(x)$ est nécessairement une fonction constante, indépendante de x , donc : $P(z) = P_{\text{atm}} + \rho g \cos \alpha (h - z)$.

□ 4 — On doit vérifier en $z = 0$ $v(z = 0) = 0$ du fait de l'adhérence de la couche de fluide sur le plan incliné immobile. En $z = h$, on ne connaît pas la vitesse de l'air, mais du fait que l'air a une viscosité beaucoup plus faible que l'eau, on en déduit

$$\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=h} = \eta_{\text{air}} \left(\frac{\partial v_{\text{air}}}{\partial z} \right)_{z=h} \approx 0$$

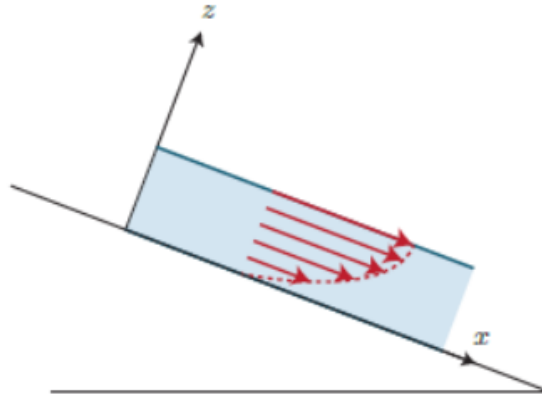
□ 5 — On intègre alors l'équation suivant $\vec{e}_x$ sachant que $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$:

$$\frac{d^2 v}{dz^2}(z) = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dz}(z) = -g \frac{\sin \alpha}{\nu} z + A \Rightarrow v(z) = -g \frac{\sin \alpha}{2\nu} z^2 + Az + B$$

La condition aux limites sur la vitesse en $z = 0$ impose $B = 0$. La condition sur la dérivée de la vitesse impose $A = g \frac{\sin \alpha}{\nu} h$. On en déduit bien l'expression fournie pour $v(z)$.

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ est de dimension $L^2 T^{-1}$ ($m^2 s^{-1}$).

□ 6 — Le profil est parabolique :



□ 7 — Le débit volumique sur une section de l'écoulement du glacier vaut : $\mathcal{D}_v = \iint_S \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}$. Attention, la vitesse n'étant pas uniforme sur S , on ne peut pas écrire $\mathcal{D}_v = vS$.

$$\mathcal{D}_v = \iint_S v(z) dS = \int_{y=0}^{y=b} dy \int_{z=0}^{z=h} \frac{g \sin \alpha}{\nu} z \left(h - \frac{z}{2} \right) dz = \frac{bg \sin \alpha}{\nu} \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{6} \right) = \boxed{\frac{bg \sin \alpha}{\nu} \frac{h^3}{3}}$$

□ 8 — La vitesse est une fonction parabolique de z . Cette parabole s'annule en $z = 0$ et en $z = 2h$. Son maximum est situé au milieu des racines, c'est à dire en $\boxed{z = h}$.

On a $\boxed{v_{\max} = v(z = h) = \frac{g \sin \alpha h^2}{2\nu}}$.

La vitesse moyenne vaut :

$$U = \frac{D_v}{bh} = \frac{g \sin \alpha}{\nu} \frac{h^2}{3} = \boxed{\frac{2}{3} v_{\max}}$$

□ 9 — Le nombre de Reynolds compare les phénomènes de diffusion et de convection de la quantité de mouvement. Dans le cas d'un faible nombre de Reynolds, l'écoulement est laminaire et les phénomènes de viscosité l'emportent; dans le cas d'un grand nombre de Reynolds, l'écoulement est turbulent et les phénomènes de convection l'emportent. Il vaut ici :

$$\boxed{\mathcal{R}_e = \frac{hU}{\nu} = 3.10^{-4}}$$

L'écoulement est bien laminaire. Notre modélisation est bien valable.

Dynamique d'un glacier

□ 10 — En reprenant le travail effectué dans les questions précédentes, il faut juste modifier la force de viscosité en tenant compte de la dépendance en y du champ de vitesse. Si on considère une particule fluide située en (x, y, z) , elle sera maintenant soumise à des forces de viscosité supplémentaires exercées par les particules situées en $y - dy$ et en $y + dy$. Dans le bilan des forces, il faut donc rajouter la force :

$$d\vec{F} = \eta dx dz \left(\frac{dv}{dz} \right)_{y+dy} \vec{e}_x - \eta dx dz \left(\frac{dv}{dz} \right)_y \vec{e}_x = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy \vec{e}_x$$

On en déduit le nouveau système :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin \alpha + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y, z) + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(y, z) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \cos \alpha \end{cases}$$

L'intégration du champ de pression se fait de la même manière que précédemment. En particulier, on montre que celui-ci ne dépend pas de x . En isolant la première équation, on aboutit de nouveau à :

$$0 = \rho g \sin \alpha + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y, z) + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(y, z)$$

□ 11 — En introduisant les grandeurs adimensionnées :

$$0 = \rho g \sin \alpha + \frac{\eta v_0}{a^2} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) \Rightarrow 0 = \frac{\rho g \sin \alpha a^2}{\eta v_0} + \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right)$$

Par identification avec l'équation adimensionnée, on posera :

$$v_0 = \frac{\rho g \sin \alpha a^2}{\eta}$$

□ 12 — Les conditions aux limites au niveau des parois s'écrivent :

$$v'(y', z' = 0) = 0 \quad \forall y' \quad v'(y' = \pm 1/2, z') = 0 \quad \forall z'$$

Par ailleurs, on a au niveau du contact de l'air :

$$\frac{\partial v'}{\partial z'}(y', z' = 1/2) = 0$$

□ 13 — On trouve graphiquement $v'_{\max} = 5,75 \cdot 10^{-2}$.

□ 14 — Par un produit en croix, en se servant de a comme référence, on trouve une distance d'environ 1,03 km pour le déplacement de la balise centrale sur 9 ans. On en déduit $v_{\max} = 110 \text{ m/an}$ et donc $U = \frac{2}{3} v_{\max} = 70 \text{ m/an} = 2,2 \mu\text{m.s}^{-1}$.

□ 15 — On sait que $v_{\max} = v_0 v'_{\max}$. On a donc :

$$\frac{v_{\max}}{v'_{\max}} = \frac{g \sin \alpha a^2}{v} \Rightarrow v = \frac{g \sin \alpha a^2 v'_{\max}}{v_{\max}} = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette valeur de viscosité est très élevée ce à quoi on pouvait s'attendre.

II. — Propulsion spatiale

□ 1 — Les quantités de mouvement de la fusée s'écrivent $\vec{p}_f(t) = m(t) \vec{v}(t)$ et $\vec{p}_f(t+dt) = m(t+dt) \vec{v}(t+dt)$. Dans le référentiel terrestre, la quantité de mouvement des gaz vaut : $\vec{p}_g = D_m dt (\vec{v}(t) + \vec{u})$.

□ 2 — En projetant sur un axe (Oz) ascendant, la variation de quantité de mouvement du système total vaut au premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{p_f(t+dt) + p_g - p_f(t)}{dt} = \frac{m(t+dt)v(t+dt) - m(t)v(t)}{dt} + D_m(v(t) - u) \\ &= \frac{d(m(t)v(t))}{dt} + D_m(v(t) - u) \\ &= m(t) \frac{dv(t)}{dt} - D_m u \end{aligned}$$

La deuxième loi de Newton s'écrit donc :

$$m(t) \frac{dv}{dt}(t) = D_m u - mg.$$

❑ 3 — Il apparaît dans l'équation précédente une force de poussée orientée vers le haut $F = D_m u$. La fusée décolle si son accélération est positive, donc si $D_m u > mg$.

❑ 4 — I_s désigne le temps pour lequel tout l'ergol a été consommé. Sachant que le débit massique de la fusée est constant, on a

$$D_m = \frac{m_0}{I_s}$$

où m_0 est la masse initiale de la fusée. Sachant que la poussée de la fusée est prise comme égale à l'opposé du poids initial, on a $D_m u = m_0 g$.

D'où :

$$I_s = \frac{u}{g}$$

❑ 5 — On a :

$$\frac{dv}{dt}(t) = \frac{D_m}{m(t)} u - g \Rightarrow \frac{dv}{dt}(t) = -\frac{u}{m(t)} \frac{dm}{dt}(t) - g = -u \frac{d(\ln m(t))}{dt} - g$$

En intégrant cette équation entre $t = 0$ et t , on en déduit :

$$v(t) = u \times \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt$$

❑ 6 — Loin de l'attraction planétaire, l'équation différentielle précédente devient :

$$\frac{dv}{dt}(t) = -u \frac{d(\ln m(t))}{dt} \Rightarrow v(t) = -u \ln m(t) + \text{cste}$$

On en déduit la relation de Tsiolkovski :

$$v_f - v_i = u \times \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$$

❑ 7 — Considérons tout d'abord la fusée à deux étages. Le largage des 100 tonnes d'ergol du premier étage produit un accroissement de vitesse de $\Delta v_1 = u \ln \frac{134}{34} = 5,48 \text{ km.s}^{-1}$ tandis que le largage des 20 tonnes du second étage produit un accroissement de vitesse de $\Delta v_2 = u \ln \frac{24}{4} = 7,16 \text{ km.s}^{-1}$ soit une accélération totale de

$\Delta v = 12,6 \text{ km.s}^{-1}$. Par comparaison, une fusée à un seul étage accélérera de $\Delta v = u \ln \frac{134}{14} = 9,03 \text{ km.s}^{-1}$.

❑ 8 — On a $\Delta v = u \ln \frac{m_u + m_c}{m_u}$ donc $m_c = m_u (e^{\frac{\Delta v}{u}} - 1)$. Les applications numériques donnent $m_{c1} = 1,25 \text{ t}$ et $m_{c2} = 142 \text{ kg}$. La propulsion ionique économise donc énormément de carburant.

III. — Fonctionnement d'une éolienne

❑ 1 — Le fluide étant en écoulement homogène et incompressible, on a :

$$S_A v_A = S_B v_B = S v$$

❑ 2 — Le théorème de Bernoulli est valable le long d'une ligne de courant si l'écoulement est parfait, stationnaire, homogène et incompressible et s'il n'y a aucune partie mobile le long de l'écoulement. C'est le cas ici entre S_A et Σ_1 et S_B et Σ_2 . On pourra donc écrire :

$$P^0 + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

$$P^0 + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

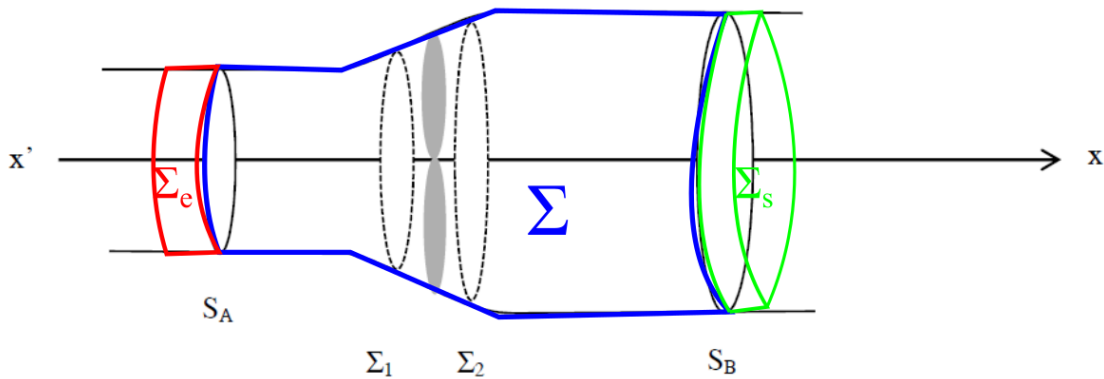
□ 3 — Pour établir le bilan d'énergie, on peut modifier la relation de Bernoulli en prenant en compte l'échange de puissance entre l'écoulement et la turbine ou repartir du premier principe. J'opte pour le premier cas :

$$\left(P^0 + \frac{1}{2}\rho v_A^2\right) - \left(P^0 + \frac{1}{2}\rho v_B^2\right) = \Delta e$$

où Δe est la variation d'énergie volumique de l'écoulement à la traversée de la turbine. Par homogénéité, on a $\Delta e = \frac{P_m}{D_v}$ (cette relation se redémontre rigoureusement si on passe par le premier principe). Soit :

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho V S (v_A^2 - v_B^2) = P_m} \quad (E)$$

□ 4 — Pour faire un bilan de quantité de mouvement sur un système en écoulement on définit un système fermé Σ^* autour du tube de courant :



A la date t , $\Sigma^*(t) = \Sigma \cup \Sigma_e$ où Σ est l'air contenu dans le tube de courant et Σ_e est l'air qui entre dans le tube de courant entre t et $t + dt$. A la date $t + dt$, $\Sigma^*(t + dt) = \Sigma \cup \Sigma_s$ où Σ_s est l'air qui sort du tube de courant entre t et $t + dt$. Le principe fondamentale de la dynamique appliqué à Σ^* donne :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -\vec{F}$$

où $-\vec{F}$ est la force exercée par l'éolienne sur Σ^* .

Or :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \frac{(\vec{p}_\Sigma + \delta m \vec{V}_B) - (\vec{p}_\Sigma + \delta m \vec{V}_A)}{dt} = D_m(\vec{V}_B - \vec{V}_A)$$

On en déduit la relation demandée.

□ 5 — Sachant que la puissance exercée par l'écoulement vaut $P_m = \vec{F} \cdot \vec{V} = FV$, on en déduit :

$$\frac{1}{2}\rho V S (V_A^2 - V_B^2) = \rho V S (V_A - V_B) V \Rightarrow \boxed{V = \frac{V_A + V_B}{2}}$$

□ 6 — On en déduit l'expression de $\mathcal{P}_m$:

$$P_m = \frac{1}{4}\rho S (V_A + V_B) (V_A^2 - V_B^2)$$

□ 7 — La pression P_m s'écrit :

$$P_m(x) = \frac{1}{4}\rho S V_A^3 (1 + x) (1 - x^2)$$

On calcule :

$$P'_m(x) = \frac{1}{4} \rho S V_A^3 (1 - 2x - 3x^2)$$

Cette fonction s'annule en $x = -1$ et $x = \frac{1}{3}$. x étant positif, seule cette solution est acceptable. Elle correspond bien à un maximum car $P''_m(x = \frac{1}{3}) < 0$. On en déduit :

$$P_{m,max} = \frac{4}{27} \rho S V_A^3$$

❑ 8 — Application numérique :

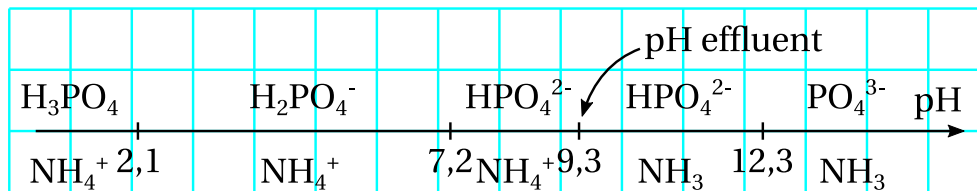
a) L'application numérique donne $P_{m,max} = 700 \text{ kW}$.

b) Il en faudrait 6200 !

IV. — Chimie

IV.A. — Eutrophisation

Q13. On trace le diagramme de prédominance des espèces phosphorées et ammoniacales :



A pH = 9,3, l'espèce phosphorée prédominante est le HPO_4^{2-} . Par ailleurs, comme pH = pK_a, on a égalité des concentrations en ions ammonium et ammoniac. On écrira :

$$[\text{HPO}_4^{2-}] = 5.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}, \quad [\text{NH}_3] = [\text{NH}_4^+] = \frac{C_N}{2} = 8.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

Q14. Le précipité de struvite apparaît si :

$$K_s = [\text{Mg}^{2+}][\text{PO}_4^{3-}][\text{NH}_4^+] = [\text{Mg}^{2+}] \times \frac{K_{a3}[\text{HPO}_4^{2-}]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \times [\text{NH}_4^+]$$

On en déduit :

$$[\text{Mg}^{2+}] = \frac{K_s[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_{a3}[\text{HPO}_4^{2-}][\text{NH}_4^+]} = \frac{10^{-11} \times 10^{-9,3}}{10^{-12,3} \times 5.10^{-3} \times 8.10^{-3}} = 2,5.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

Q15. Pour que la struvite commence à précipiter, il faut un minimum de $2,5.10^{-4}$ mole de Mg^{2+} dans un litre d'eau, soit 0,25 mole de Mg^{2+} dans un m³. Pour cela, on peut verser 0,25 mole de $\text{MgCl}_2(\text{s})$ ce qui fait une masse de $m = 24 \text{ g}$.

IV.B. — L'oxygène

□ 1 — L'eau est constituée d'un atome d'oxygène et de deux atome d'hydrogène. Le pourcentage massique en oxygène dans l'eau vaut donc $x = \frac{m_O}{m_{H_2O}} = 88,8\%$.

□ 2 — Les rapports massique de l'oxygène dans l'eau pure et dans l'eau de mer valent $m_O/m_{H_2O} = 0,888$ et $m_O/m_{\text{mer}} = 0,86$, soit le pourcentage massique d'eau pure dans l'eau de mer :

$$\frac{m_{H_2O}}{m_{\text{mer}}} = \frac{m_{H_2O}}{m_O} \times \frac{m_O}{m_{\text{mer}}} = \frac{0,86}{0,888} = 0,969$$

On en déduit par différence la fraction massique des composants autres que l'eau dans l'eau de mer :

$$\frac{m_{\text{autre}}}{m_{\text{mer}}} = 1 - 0,969 = 0,031$$

Puis leur concentration volumique, en utilisant les données (densité de l'eau de mer $d = 1,03$) :

$$c = \frac{m_{\text{autre}}}{V_{\text{mer}}} = \frac{m_{\text{autre}} \rho_{\text{mer}}}{m_{\text{mer}}} = \frac{m_{\text{autre}}}{m_{\text{mer}}} \times (d \times \rho_{H_2O}) = 0,031 \times 1,03 \times 1000 = 32,4 \text{ g L}^{-1}$$

□ 3 — Pour un même volume, en utilisant la loi des gaz parfaits (qui donne une estimation car elle n'est certainement pas vérifiée à 200 bar) et les données $r =$

$$\frac{m_{O_2, \text{ gazeux}}}{m_{O_2, \text{ liquide}}} = \frac{\rho_{O_2, \text{ gazeux}}}{\rho_{O_2, \text{ liquide}}} = \frac{PM_a}{RT \rho_{O_2, \text{ liquide}}} = 0,231$$

Le choix entre les deux formes de stockage résulte d'un compromis : le stockage sous forme de gaz comprimé est plus simple à mettre en œuvre (pas de système de refroidissement ni de sécurité en cas de panne du refroidissement à prévoir) mais le stockage sous forme de liquide permet un gain de volume d'un facteur 5.

□ 4 — De la relation $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0$ on déduit les valeurs

$$\Delta_r H_1^0 = -45,6 \text{ kJ mol}^{-1} ; \Delta_r H_2^0 = -824 \text{ kJ mol}^{-1}$$

Ces deux valeurs sont négatives, donc les deux réactions sont exothermiques.

□ 5 — La variance est le nombre de paramètres intensifs et indépendants que l'expérimentateur doit/peut fixer pour caractériser entièrement l'état d'équilibre. Pour les réactions (1) et (2), les paramètres intensifs sont la température et la pression. A l'équilibre, ces deux grandeurs sont reliées par la relation $K^0(T) = Q$. La variance vaut donc 1.

□ 6 — Les deux réactions étant exothermiques, elles seront favorisées par une diminution de la température du milieu réactionnel.

□ 7 — Le coefficient directeur est égal à $-\Delta_r S^0$. On en déduit :

$$\Delta_r S_1^0 = 0,275 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} > 0 ; \Delta_r S_2^0 = -0,22 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} < 0$$

La première réaction produit du gaz à partir de solide ce qui augmente l'entropie. Au contraire, la deuxième réaction consomme du gaz pour produire du solide. L'entropie diminue.

□ 8 — Pour une relation isotherme et isobare, on a $Q_P = \Delta_r H^0 \times \xi$.

□ 9 — On a la relation :

$$K^0(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0(T)}{RT}\right)$$

□ 10 — Les quotients de réaction des réactions (1) et (2) valent :

$$Q_{r,1} = \left(\frac{P_{O_2}}{P^0} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 0,59 \quad Q_{r,2} = \frac{1}{Q_{r,1}} \approx 1,69$$

On calcule pour ces deux réactions à 300 °C :

$$K_1^0 = 3,4 \cdot 10^{18} ; K_2^0 = 4,5 \cdot 10^{63}$$

Dans les deux cas $K^0 > Q_r$ donc les deux réactions sont totales dans le sens direct.

□ 11 — On veut calculer la température T_f à laquelle la réaction de n moles de NaClO_3 porte n moles de NaClO_3 . On procède comme pour le calcul d'une *température de flamme* :

—La réaction (1) en conditions isothermes (à 300 °C) et isobares de n moles de NaClO_3 dégage une quantité de chaleur égale à : $\Delta H_1 = \Delta_r H_1^0 \xi = n \Delta_r H_1^0 < 0$

—L'échauffement de n moles de NaClO_3 initialement à T_0 nécessite un apport de chaleur de : $\Delta H_2 = n M_{\text{NaClO}_3} c_{p, \text{NaClO}_3} (T_f - T_0) > 0$,

On en déduit la température finale

$$T_f = T_0 + \frac{-\Delta_r H_1^0}{M_{\text{NaClO}_3} c_{p, \text{NaClO}_3}} = 458^\circ\text{C}$$

Même s'il y a nécessairement des pertes thermiques, la chaleur dégagée par la réaction 1 semble suffisante pour maintenir la température à 300 °C : la réaction 1 est auto-entretenu.

La présence du fer (en petite quantité puisque la réaction 2 consomme une partie du dioxygène libéré par la réaction 1, donc diminue la production de dioxygène) est nécessaire initialement pour démarrer la réaction 1.