

DS n°3 (niveau difficile)

PSI 2022/2023

Durée 4 heures - Calculatrices **autorisées**

Mécanique des fluides - Chimie

I. — Pertes de charge dans une conduite

I.A. — Fluide en écoulement homogène incompressible laminaire

- 1 — —Ecoulement parfait : écoulement sans effet dû à la viscosité ni à la diffusion thermique.
—Ecoulement homogène incompressible : les grandeurs macroscopiques qui décrivent le fluide ne dépendent pas du point d'observation ; notamment la masse volumique est la même en tout point.
—Ecoulement stationnaire : en un point fixe de l'espace, les grandeurs caractéristiques de l'écoulement ne dépendent pas du temps.

- 2 — La démo de la relation de Bernoulli est dans le cours. L'énergie volumique du fluide (en J.m^{-3}) vaut :

$$e_T = p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = \text{cste}$$

La charge est reliée à e_T par la relation $H = \frac{e_T}{\rho g}$.

- 3 — L'hypothèse d'un écoulement parfait ne peut être valide près des parois dans un écoulement laminaire d'un fluide réel, car la vitesse doit s'y annuler à cause de la viscosité.

- 4 — Dans le cas où la viscosité rentre en jeu, l'énergie volumique décroît à cause des forces de frottements visqueuses. Le bilan d'énergie effectué sur une particule de fluide se déplaçant de A à B donne :

$$e_{T,B} - e_{T,A} = w_{\text{visc}} < 0$$

où w_{visc} est le travail des forces de viscosité :

$$w_{\text{visc}} = \int_A^B \overrightarrow{f_{\text{visc}}(M)} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

- 5 — On en déduit :

$$H(B) - H(A) = \frac{e_{T,B} - e_{T,A}}{\rho g} = \frac{1}{\rho g} \int_A^B \overrightarrow{f_{\text{visc}}} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

Écoulement de Poiseuille

□ 6 — Le fluide étant en écoulement incompressible et stationnaire, le débit volumique est conservé. La divergence du fluide est donc nulle. Sachant que la vitesse est uniquement dirigée suivant le vecteur $\vec{u}_x$, on a :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v(r, x)}{\partial x} = 0$$

Le champ des vitesses ne dépend donc que de r .

□ 7 — Considérons une ligne de champ horizontale située à une distance r de l'axe du cylindre. La relation de la question 5 se réécrit :

$$H(x_B) - H(x_A) = \frac{1}{\rho g} \int_{x_A}^{x_B} f_{\text{visc}}(x, r) dx$$

Or, étant donné que $H(x_B) - H(x_A) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial H}{\partial x}(x, r) dx$, on obtient :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, r) = \frac{1}{\rho g} f_{\text{visc}}(x, r)$$

soit

$$\boxed{\eta \Delta v(r) = -\rho g a}$$

En utilisant l'expression du laplacien fourni et en intégrant deux fois, on en déduit le champ des vitesses :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) &= -\frac{\rho g a}{\eta} \Leftrightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) = -\frac{\rho g a r}{\eta} \\ \Leftrightarrow r \frac{dv(r)}{dr} &= -\frac{\rho g a r^2}{2\eta} + A \\ \Leftrightarrow v(r) &= -\frac{\rho g a r^2}{4\eta} + A \ln r + B \end{aligned}$$

Etant donné que la vitesse du fluide ne peut diverger en $r = 0$, on a nécessairement $\boxed{A = 0}$. Soit $v(r) = -\frac{\rho g a r^2}{4\eta} + B$. La condition d'adhérence aux parois impose par ailleurs $\boxed{B = \frac{\rho g a r_0^2}{4\eta}}$. On en déduit :

$$v(r) = \frac{\rho g a r_0^2}{4\eta} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$$

On en déduit $v_{\max} = \frac{\rho g a r_0^2}{4\eta}$.

□ 8 — Par définition,

$$U = \frac{1}{S} \iint_S \vec{v}(r) \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R v(r) r dr d\theta = \frac{v_{\max}}{2}.$$

Sachant que $Q = U \pi r_0^2$, on en déduit $v_{\max} = 2 \frac{Q}{\pi r_0^2}$. D'où :

$$v(r) = 2 \frac{Q}{\pi r_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$$

□ 9 — Pour un débit de 30L.s^{-1} et un diamètre de 20cm , la vitesse débitante vaut $U = 0,95\text{M.s}^{-1}$. On en déduit la perte de charge linéique :

$$U = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{a\rho g r_0^2}{8\eta} \Leftrightarrow a = \frac{8\eta U}{\rho g r_0^2}$$

—Cas d'une huile (SAE-90) :

• $a = 1,5 \cdot 10^{-2}$ d'où une surpression nécessaire $\Delta P = \rho g \Delta H = \rho g a L = 6,5 \cdot 10^3 \text{Pa}$.

• Nombre de Reynolds : $\mathcal{R}_e = \frac{\rho D U}{\eta} = 990 < 2000$. L'écoulement est bien laminaire.

—Cas de l'eau :

• Nombre de Reynolds : $\mathcal{R}_e = 1,9 \cdot 10^5$. L'écoulement de l'eau est turbulent. Le modèle n'est pas valable.

I.B. — Fluide visqueux homogène incompressible en régime turbulent

Charge moyenne dans une section à symétrie de révolution

□ 10 — La quantité d'énergie cinétique traversant une surface élémentaire dS pendant dt est la quantité d'énergie cinétique contenue dans le cylindre de section dS et de hauteur $v dt$. Elle vaut :

$$\delta^2 E_c = \frac{1}{2} \rho v^2(r) \vec{v} dt \cdot \vec{dS}$$

La quantité d'énergie cinétique traversant toute la surface S vaut donc :

$$\delta E_c = \iint_S \frac{1}{2} \rho v^3(r) dt dS$$

On en déduit que la puissance cinétique, dérivée de l'énergie cinétique, vaut :

$$P_{c,\text{réelle}} = \frac{dE_c}{dt} = \iint_S \frac{1}{2} \rho v^3(r) dS.$$

La puissance cinétique pour un écoulement uniforme vaut simplement

$$P_{c,\text{uniforme}} = \frac{1}{2} \rho U^3 S$$

On en déduit alors l'expression de α fournie.

□ 11 — Le calcul a l'air compliqué, mais en fait, il suffit juste d'écrire la définition de $\overline{H}$ et de se rappeler qu'une intégration sur S se ramène à une intégration sur r :

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \frac{1}{Q} \iint_S H(x, r) v(r) dS = \frac{1}{Q} \iint_S \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2(r)}{2g} \right) v(r) dS \\ &= \frac{1}{Q} \left(z \iint_S v(r) dS + \frac{p}{\rho g} \iint_S v(r) dS + \frac{1}{2g} \iint_S v^3(r) dS \right) \\ &= \frac{1}{Q} \left(zQ + \frac{p}{\rho g} Q + \frac{\alpha U^3 S}{2g} \right) \\ &= z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha U^3 S}{2gQ} \\ &= z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha U^2}{2g} \end{aligned}$$

□ 12 — Pour l'écoulement uniforme, on a $\alpha = 1$. Pour l'écoulement laminaire de Poiseuille, on a :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{U^3 S} \iint_S v^3(r) dS = \frac{2}{U^3 r_0^2} \int_0^{r_0} v^3(r) r dr = \frac{2v_{\max}^3}{U^3 r_0^2} \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 r dr \\ &= \frac{16}{r_0^2} \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 r dr \\ &= \frac{16}{r_0^2} \left(-\frac{r_0^2}{2}\right) \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^4\right]_0^{r_0} = 2\end{aligned}$$

□ 13 — Dans le cas de régimes turbulents, α est compris entre 1,05 et 1,20 ce qui se rapproche d'un écoulement uniforme, c'est-à-dire de ce que l'on aurait avec un fluide parfait.

Rugosité, diagramme de Moody

□ 14 — Pour un écoulement de Poiseuille, la perte de charge vaut :

$$\Delta H = aL = \frac{8\eta U}{\rho g r_0^2} L$$

. En identifiant avec l'expression fournie des pertes de charges, on obtient :

$$f = \frac{64}{\mathcal{R}_e}$$

Pour un écoulement laminaire, le fluide est supposé s'écouler en couche. Implicitement, la rugosité de la paroi est supposée nulle.

□ 15 — Pour utiliser le diagramme de Moody, calculons déjà le nombre de Reynolds de l'écoulement :

$$\mathcal{R}_e = \frac{DU\rho}{\eta} = 1,9 \cdot 10^5. \text{ On lit alors le facteur de friction } f \text{ pour les différentes surfaces :}$$

fonte	rugosité relative	f	Perte de charge
neuve	2×10^{-3}	$2,45 \times 10^{-2}$	47,5m
corrodée	$6 \cdot 10^{-3}$	$3,25 \times 10^{-2}$	63 m
déposée	$8 \cdot 10^{-3}$	$3,55 \times 10^{-2}$	69 m

Pertes singulières

□ 16 — Pour un coude de rayon 1,5m tournant à 90° , le coefficient K vaut 0,2 ce qui correspond à une perte de charge singulière de $\Delta H_s = K \frac{U^2}{2g} = 9,310^{-3} \text{ m}$. Pour de la fonte neuve, la perte de charge régulière sur un mètre vaut $\Delta H_l = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. La perte singulière du coude est donc équivalente à 1,6 m de fonte neuve.

II. — Roue-vanne de Sagebien

II.A. — Etude dynamique du mouvement de la roue-vanne

□ 1 — Le débit massique vaut : $D_m = \rho D_v = \rho v S = \boxed{\rho d h_0 v}$. Lorsqu'une pale tourne de $d\beta$, elle entraîne un volume $\delta V = \frac{1}{2} d\beta \cdot d(R'^2 - R^2)$. La conservation du débit massique conduit donc à :

$$\rho \frac{\delta V}{dt} = \frac{1}{2} \rho \omega \cdot d(R'^2 - R^2) = \rho d h_0 v$$

soit :

$$\omega = 2 \frac{h_0 v}{R'^2 - R^2}$$

□ 2 — La vitesse moyenne d'une pale est $v = \frac{R + R'}{2} \omega$. On en déduit $\boxed{R' - R = h_0}$. L'application numérique

donne : $\boxed{h_0 = \frac{D_m}{v d \rho} = 4,3 \text{ m}}$ soit $\boxed{R' = 15,3 \text{ m}}$.

□ 3 — L'écoulement étant uniforme, en se plaçant dans le référentiel du fluide en question, on peut appliquer la loi de la statique des fluides :

$$p_1(z) = p_0 - \rho g z \text{ et } p_2(z) = p_0 - \rho g z - \rho g H$$

□ 4 — La pression étant égale des deux côtés d'une pale inactive, la résultante des forces de pression est nulle. Pour la pale active, la différence de pression entre les deux faces vaut $\Delta p = p_C - p_D = \rho g H$. La résultante des forces de pression vaut donc :

$$\vec{F} = \rho g H (R' - R) d (\cos \alpha \vec{u}_\theta + \sin \alpha \vec{u}_r)$$

Cette force s'appliquant au milieu de la pale, son moment par rapport à l'axe de rotation vaut :

$$M = \frac{R + R'}{2} \rho g H (R' - R) d \cos \alpha$$

□ 5 — Pour chaque pale i , on a une force $\vec{F}_i = (p_{i+1} - p_i) (R' - R) d \vec{n}_i$ ou $\vec{n}_i$ est un le vecteur normal à la pale i et un moment $\frac{R + R'}{2} (p_{i+1} - p_i) (R' - R) d \cos \alpha$. La somme des moments redonne la formule précédente.

□ 6 — Le couple est bien entendu égal au moment M . Sachant qu'on ne nous donne aucune information sur α , on considèrera cet angle comme petit et on prendra $\cos \alpha \approx 1$. On obtient alors $\boxed{\Gamma = M = 2,33 \text{ MNm}}$.

□ 7 — On prend une voiture de largeur 2 m et de hauteur 1,5 m, soit un maitre-couple de $S = 3 \text{ m}^2$ qui se déplace à $v = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$. On considère un $C_x = 0,35$. Cela conduit à une force de trainée $T = \frac{1}{2} C_x \rho_{\text{air}} S v^2$ et une puissance $T \cdot v \approx 10 \text{ kW}$. Le moteur tourne alors à 2000 tr/min et la puissance vaut $\Gamma \omega$. Soit $\Gamma = 47 \text{ Nm}$. Les ordres de grandeur des couples pour un moteur de voiture et la roue ne sont pas du tout les mêmes.

II.B. — Bilans énergétiques de fonctionnement

□ 8 — La vitesse de rotation de la roue vaut $\omega = 0,046 \text{ rad s}^{-1} = 0,44 \text{ tr/min}$, soit une vitesse bien inférieure à celle d'un moteur. La puissance transférée à la roue vaut elle : $\boxed{P = \Gamma \omega = 105 \text{ kW}}$. En puissance, on a par contre des ordres de grandeur comparables.

□ 9 — On effectue un bilan d'énergie mécanique entre t et $t + dt$ sur un système fermé Σ^* d'eau. En notant e_e et e_s les énergies mécaniques massiques en entrée et en sortie, on obtient :

- la pression étant la même en amont et en aval, le travail des forces de pression aval compense celui des forces amont.
- les énergies cinétiques d'une masse δm en amont et en aval sont égales.
- si P est la puissance des efforts mécaniques exercés par l'eau sur la roue, la puissance des efforts exercés par la roue sur l'eau vaut $-P$.

En régime permanent, on a donc :

$$\begin{aligned} dE_{\Sigma^*} &= -P dt \\ \frac{\delta E_s - \delta E_e}{dt} &= -P \\ D_m(e_s - e_e) &= -P \\ D_m(-\rho g H - 0) &= -P \Rightarrow \boxed{P = D_m \rho g H} \end{aligned}$$

On en déduit $P = 105 \text{ MW}$.

□ 10 — On considère qu'au vu de la configuration des canaux d'entrée et sortie, on ne peut récupérer que l'énergie potentielle de pesanteur qui vaut, en puissance, $D_m \rho g H$. Le rendement est donc unitaire : $\eta = 1$.

On peut imaginer que l'écoulement de l'eau n'est pas parfaitement laminaire (aube non profilée), ce qui cause des pertes par turbulence. L'écoulement n'est pas parfaitement uniforme, le gradient de vitesse va causer des pertes par viscosité. D'autre part, en dehors des pertes hydrauliques, la faible vitesse de rotation de la roue va imposer des engrenages qui vont dissiper de l'énergie.

III. — Chimie

III.A. — Silicium

□ 1 — La coordinence est le nombre de plus proche voisins. Elle vaut 4 ici (on raisonnera sur un atome située sur un site tétraédrique). Chaque atome compte pour $\frac{1}{8}$ ème au sommet du cube, $\frac{1}{2}$ au centre d'une face et 1 en site tétraédrique. Il ya 8 sites tétraédriques mais seul 4 sont occupés. il y a donc

$$\boxed{\frac{1}{8} \times 8 + 6 \times \frac{1}{2} + 4 = 8} \text{ atomes par maille.}$$

□ 2 — Il faut déterminer la distance la plus courte entre atomes, là où les atomes se touchent. Il s'agit ici de la distance séparant un atome situé au centre d'un site tétraédrique et des atomes situés sur les coins du tétraèdre. Cette distance est le quart de la diagonale du cube. On a donc :

$$2r = \sqrt{3} \frac{a}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{8r}{\sqrt{3}} = 545 \text{ nm}}$$

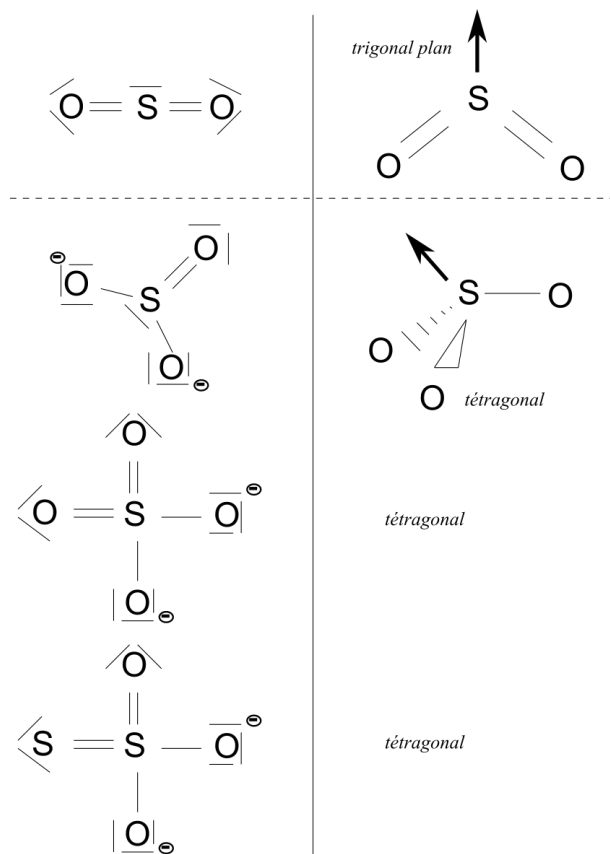
□ 3 — La compacité est le rapport du volume occupé par les atomes de la maille sur le volume de la maille. Elle vaut :

$$\boxed{C = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi r^3}{a^3} = 0,34}$$

Cette valeur est faible par rapport à la compacité maximale égale à 0,74.

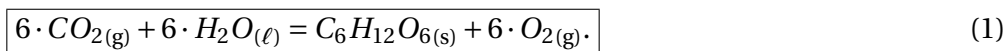
III.B. — Quelques éléments sur le Soufre

- ❑ 1 — Le numéro atomique du soufre vaut $Z = 16$.
- ❑ 2 — Sa configuration électronique est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$.
- ❑ 3 — Hors-programme
- ❑ 4 — Les structures de Lewis et la géométrie VSEPR sont les suivantes :



III.C. — Photosynthèse chlorophyllienne

- ❑ 1 — L'équilibre de synthèse du glucose s'écrit :



- ❑ 2 — Soit $n = m/M_g$ la quantité de glucose formée. Alors on forme $6 \cdot n$ moles de dioxygène formés, soit pour un gaz parfait :

$$V(\text{O}_2) = \frac{6 \cdot n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{6 \cdot m \cdot R \cdot T}{M_g \cdot p} \quad (2)$$

- ❑ 3 — L'enthalpie libre de réaction s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta_r G &= \Delta_r G^\circ + R \cdot T \cdot \ln(Q_r) \approx 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 \cdot \ln\left(\frac{20^6}{0,03^6}\right) \\ &\approx 3 \cdot 10^6 + 18 \cdot 10^3 \cdot \ln\left(\frac{2000}{3}\right) \approx 3 \cdot 10^6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

L'enthalpie libre de réaction est positive, donc le système évolue spontanément dans le sens indirect. Il est donc indispensable d'avoir des arbres pour effectuer la réaction de manière forcée dans le sens direct et ainsi produire du dioxygène.