Correction niveau moyen

PSI 2022/2023

Durée 4 heures - Calculatrices **autorisées**

Mécanique des fluides - Chimie

I. — Problème 1

❑ **1** — Les conditions pour appliquer la relation de Bernoulli (généreusement donnée) sont : Ecoulement parfait, stationnaire (ici, c'est plutôt quasi-stationnaire), incompressible et homogène. On peut ajouter qu'il ne faut pas qu'il y ait de dispositif actif, type pompe.

❑ **2** — Elle implique la conservation du débit massique $D_m = C^{te}$. On en déduit $v_A S_A = v_B S_B$.

❑ **3** — Sachant que $S_A >> S_B$, on a $v_A << v_B$. On néglige donc v_A devant v_B. L'application de Bernoulli donne la formule de Torricelli :

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

❑ **4** — La conservation du débit implique que :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t)S_A = -\sqrt{2gh(t)}S_B \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_0^H \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}T \Leftrightarrow T = \frac{S_A}{S_B}\sqrt{\frac{2H}{g}} = 7\text{min}31\text{s}$$

❑ **5** — En négligeant toujours v_A, le bilan d'énergie donne :

$$v_B = \sqrt{\frac{2gh}{1+K_c}}$$

❑ **6** — En effectuant le même calcul qu'en absence de pertes de charges , on en déduit :

$$T' = \frac{S_A}{S_B}\sqrt{\frac{2H(1+K_c)}{g}} = 9\text{min}21\text{s}$$

I.A. — Prise en compte d'une perte de charge régulière

❑ **7** — On se place en régime permanent. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au cylindre donne :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = (p_{C_1} - p_{C_2})\pi r^2 \vec{u}_z + \vec{f} + \rho V \vec{g}$$

où $\vec{f}$ dénote la résultante des forces exercée par le fluide extérieur au cylindre sur le fluide intérieur. Ces forces sont uniquement dues à la viscosité (les efforts latérals de pression se compensent). En régime permanent et en écoulement laminaire $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$. En projetant sur $\vec{u}_z$, on en déduit :

$$
\begin{aligned}
&(p_{C_1} - p_{C_2})\pi r^2 + \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} 2\pi r \ell - \rho(z_2 - z_1)\pi r^2 g = 0 \\
&\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{2\eta\ell}(\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}) r
\end{aligned}
$$

On a donc $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{2\eta\ell} > 0}$. On retrouve bien le fait que la dérivée de la vitesse par rapport à r est négative, ce qui est logique car la vitesse décroît avec r : elle est maximale au centre et nulle sur les bords.

❑ **8** — En intégrant l'équation précédente, on en déduit :

$$v(r) = -\frac{1}{4\eta\ell}(\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}) r^2 + A$$

La condition d'adhérence à la paroi fournit la valeur de la constante d'intégration A. On en déduit :

$$\boxed{v(r) = v_{\text{max}} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)}$$

avec $\boxed{v_{\text{max}} = \dfrac{(\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}) a^2}{4\eta\ell}}$.

❑ **9** — Par intégration sur une section du tube, on obtient :

$$Q = \iint_S \vec{v}(r) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^a v_{\text{max}} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 2\pi r \mathrm{d}r = v_{\text{max}} \frac{\pi a^2}{2}$$

On en déduit la loi de Hagen-Poiseuille dans une géométrie verticale :

$$\boxed{Q = \frac{(\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2})\pi a^4}{8\eta\ell}}$$

❑ **10** — La vitesse moyenne est telle que :

$$v_{\text{moy}} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{v_{\text{max}}}{2}$$

❑ **11** — D'après la loi de Hagen-Poiseuille, la perte de charge régulière s'exprime par :

$$\Delta p_r = \frac{8\eta\ell}{\pi a^4} \times Q = \frac{8\eta\ell}{a^2} v_{\text{moy}} = \left(\frac{32\eta}{a\rho v_{\text{moy}}}\right) \times \frac{1}{2}\rho v_{\text{moy}}^2 \frac{\ell}{d}$$

Par identification, on en déduit :

$$\boxed{\lambda = \frac{32\eta}{a v_{\text{moy}} \rho}}$$

❑ **12** — Le nombre de Reynolds est :

$$\mathscr{R}_e = \frac{d v_{\text{moy}}}{\nu} = \frac{2 a v_{\text{moy}} \rho}{\eta}$$

On en déduit :

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{\mathscr{R}_e}}$$

❑ **13** — $\mathscr{R}_e = 27.10^3$

❑ **14** — $\mathscr{R}_e > 2000$, l'écoulement est dont turbulent et non laminaire, l'hypothèse est non valide. Les calculs précédents sont faux.

I.B. — Remplissage du réservoir d'une voiture

❑ **15** — La somme des coefficients de perte de charge singulière vaut :

$$K_{\text{tot}} = K_c + 2K_{\text{coude brusque}} + K_{\text{pompe}} + K_{\text{coude arrondi}} = 0,55 + 2 \times 1,5 + 6 + 0,091 = 9,7$$

❑ **16** — En reprenant la formule de Darcy-Weisbach fournie dans le sujet, on en déduit la somme des pertes de charge singulières vaut :

$$\boxed{\Delta p_{s,tot} = \frac{K}{2}\rho v_{\text{moy}}^2 = 83.10^3\text{Pa} = 0,83\text{bar}}$$

❑ **17** — La valeur totale des pertes de charge régulières vaut :

$$\boxed{\Delta p_{r,tot} = \lambda\frac{1}{2}\rho v_{\text{moy}}^2\frac{\ell}{2a} = 58.10^3\text{Pa} = 0,58\text{bar}}$$

❑ **18** — La section étant la même dans tout le circuit, la vitesse moyenne ne change pas (fluide incompressible). Le débit vaut donc :

$$\boxed{Q = v_{\text{moy}}S_B = 4,5.10^{-3}\text{m.s}^{-1}}$$

❑ **19** — Attention, si la pompe a un rendement de 80%, cela signifie que la puissance utile (puissance mécanique effectivement échangée avec le fluide) vaut 80% de la puissance électrique fournie par le réseau. En reprenant le bilan mécanique fourni par l'énoncé, on obtient :

$$P_e = \frac{P_u}{0,8} = \frac{Q_V}{0,8}\left(\frac{1}{2}\rho(v_E^2 + \rho g(z_E - z_A) + \Delta p_{r,tot} + \Delta p_{s,tot}\right) = 1,1\text{kW}$$

II. — Forces de frottements sur une voiture

❑ **1** — L'écoulement est laminaire à l'intérieur de la couche limite, tout autour de la voiture. L'écoulement est turbulent en dehors de la couche limite et dans le sillage du véhicule. Le coefficient C_x dépend du nombre de Reynolds et de la forme de la carrosserie du véhicule.

❑ **2** — En régime permanent, la puissance fournie par le moteur compense exactement la puissance perdue à cause des frottements. On a donc :

$$P = F_x V = \frac{C_x\rho_0 SV^3}{2} \Rightarrow \boxed{V = \left(\frac{2P}{C_x\rho_0 S}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

L'application numérique donne : $V = \left(\dfrac{125.10^3}{0,33\times\times 1,2\times 2,5}\right)^{\frac{1}{3}} = 50\text{m.s}^{-1}$. D'où $\boxed{V_{max} = 180\text{km.h}^{-1}}$.

❑ **3** — La consommation en carburant C pour $d = 100$ km est proportionnelle à l'énergie consommée sur 100 km. Cette énergie est égale à la puissance P multipliée par le temps $\Delta t = \dfrac{d}{V}$ pour faire les 100 km. C est donc proportionnelle à V^2. *Par contre la consommation en litres par seconde est directement proportionnelle à la puissance et donc à* V^3.

❑ **4** — L'écoulement étant supposé *stationnaire*, $\boxed{\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2}$. La section du tube étant constante, la conservation du débit massique impose la conservation de la norme de la vitesse.

❑ **5** — On note Σ_f le système fermé et Σ_0 le système ouvert contenu dans le volume $A'B'CD$. Effectuons le bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\Sigma_f}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{aileron}\to\Sigma} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\Sigma_0}}{\mathrm{d}t} + D_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_{\text{aileron}\to\Sigma} + \vec{F}_P$$
$$D_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_{\text{aileron}\to\Sigma}$$

❑ **6** — On en déduit

$$\vec{F}_{air\to vehicule} = \rho_0 S_e v_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

La projection suivant la perpendiculaire à la route donne :

$$F_{air\to vehicule,\perp} = \rho_0 S_e v_1(-v_1 \sin\alpha - v_2 \sin\beta) = -\rho_0 S_e v_1^2(\sin\alpha + \sin\beta)$$

Cette force pousse la voiture vers le bas.

III. — Chimie

III.A. — Silicium

❑ **1** — La coordinence est le nombre de plus proche voisins. Elle vaut 4 ici (on raisonnera sur un atome située sur un site tétrahédrique). Chaque atome compte pour $\frac{1}{8}$ème au sommet du cube, $\frac{1}{2}$ au centre d'une face et 1 en site tétrahédrique. Il ya 8 sites tétrahédriques mais seul 4 sont occupés. il y a donc $\boxed{\frac{1}{8}\times 8 + 6\times\frac{1}{2} + 4 = 8}$ atomes par maille.

❑ **2** — Il faut déterminer la distance la plus courte entre atomes, là où les atomes se touchent. Il s'agit ici de la distance séparant un atome situé au centre d'un site tétrahédrique et des atomes situés sur les coins du tétrahèdre. Cette distance est le quart de la diagonale du cube. On a donc :

$$2r = \sqrt{3}\frac{a}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{8r}{\sqrt{3}} = 545\text{nm}}$$

❑ **3** — La compacité est le rapport du volume occupé par les atomes de la maille sur le volume de la maille. Elle vaut :

$$\boxed{C = \frac{8\times\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = 0{,}34}$$

Cette valeur est faible par rapport à la compacité maximale égale à 0,74.

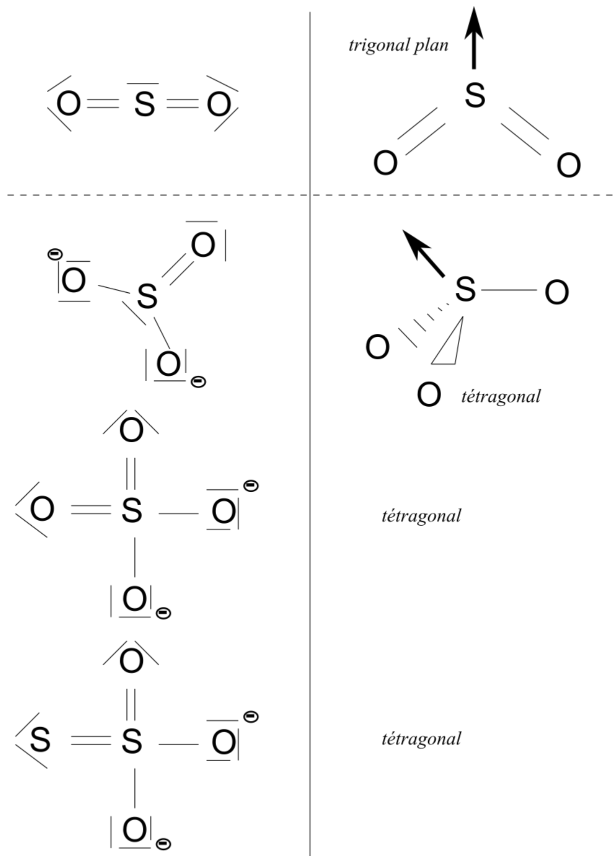
III.B. — Quelques éléments sur le Soufre

❑ **1** — Le numéro atomique du soufre vaut $Z = 16$.

❑ **2** — Sa configuration électronique est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$.

❑ **3** — Hors-programme

❑ **4** — Les structures de Lewis et la géométrie VSEPR sont les suivantes :



III.C. — Photosynthèse chlorophylienne

❑ **1 —** L'équilibre de synthèse du glucose s'écrit :

$$\boxed{6\cdot CO_{2\,(\mathrm{g})} + 6\cdot H_2O_{(\ell)} = C_6H_{12}O_{6\,(\mathrm{s})} + 6\cdot O_{2\,(\mathrm{g})}.} \tag{1}$$

❑ **2 —** Soit $n = m/M_\mathrm{g}$ la quantité de glucose formée. Alors on forme $6\cdot n$ moles de dioxygène formés, soit pour un gaz parfait :

$$\boxed{V(O_2) = \frac{6\cdot n\cdot R\cdot T}{p} = \frac{6\cdot m\cdot R\cdot T}{M_\mathrm{g}\cdot p}.} \tag{2}$$

❑ **3 —** L'enthalpie libre de réaction s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta_\mathrm{r}G = \Delta_\mathrm{r}G^\circ + R\cdot T\cdot\ln(Q_\mathrm{r}) &\approx 3\cdot 10^6 + 3\cdot 10^3\cdot\ln\left(\frac{20^6}{0{,}03^6}\right)\\ &\approx 3\cdot 10^6 + 18\cdot 10^3\cdot\ln\left(\frac{2000}{3}\right) \approx 3\cdot 10^6\ \mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}.\end{aligned} \tag{3}$$

L'enthalpie libre de réaction est positive, donc le système évolue spontanément dans le sens indirect. Il est donc indispensable d'avoir des arbres pour effectuer la réaction de manière forcée dans le sens direct et ainsi produire du dioxygène.