TP n°4 Echantillonnage d'un signal analogique

PSI 2022/2023

Compétences expérimentales

- Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition.
- Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
- Capacité numérique : calculer, à l'aide d'un langage de programmation, la transformée de Fourier discrète d'un signal numérique

Matériel

- GBF
- Interface d'acquisition Sysam-SP5

1 Présentation de la numérisation d'un signal

La mesure d'un signal, qualifié "d'analogique", se réalise en général à l'aide d'un "capteur" auquel il faut souvent ajouter un "adaptateur" (amplificateur, hacheur, redresseur...). Par exemple un microphone ne délivrera une tension que de l'ordre du mV, il faudra donc l'amplifier.

Si l'on désire réaliser un traitement numérique de ce signal, une conversion « analogique-numérique » (« CAN ») doit être réalisée. C'est par exemple ce que réalise une carte d'acquisition.

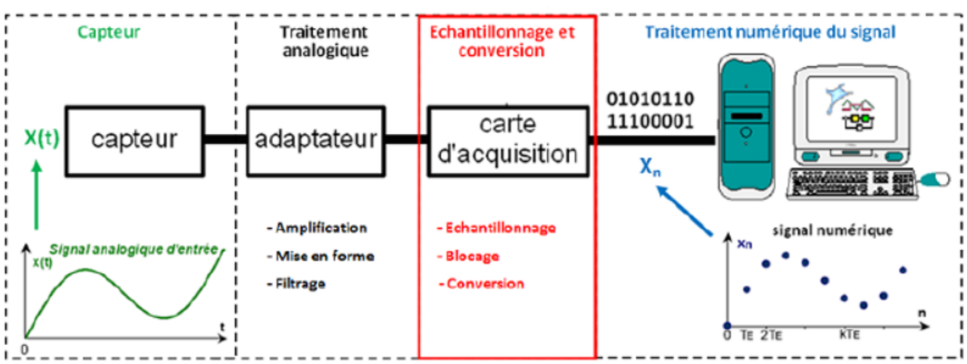


Figure 1 – *Chaîne de numérisation et de traitement d'un signal analogique*

La numérisation est le passage du signal analogique $x(t)$ au signal numérique $\{ x_n\}$converti en binaire. Elle se décompose en deux étapes :

- **L'échantillonnage**, qui consiste à prélever régulièrement des échantillons $\{x_n\}$ au signal $x(t)$. La suite $\{x_k\}$ s'appelle signal numérique.
- **La quantification**, qui consiste à transformer ces échantillons en nombres binaires.

1.1 Obtention d'un signal échantillonné par "échantillonnage analogique"

La saisie instantanée d'échantillons est illusoire. Le principe de l'échantillonnage analogique consiste à multiplier le signal $x(t)$ par un train d'impulsions $f(t)$ de fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$:

- f_e est la **fréquence d'échantillonnage**,
- T_e est la **période d'échantillonnage**.

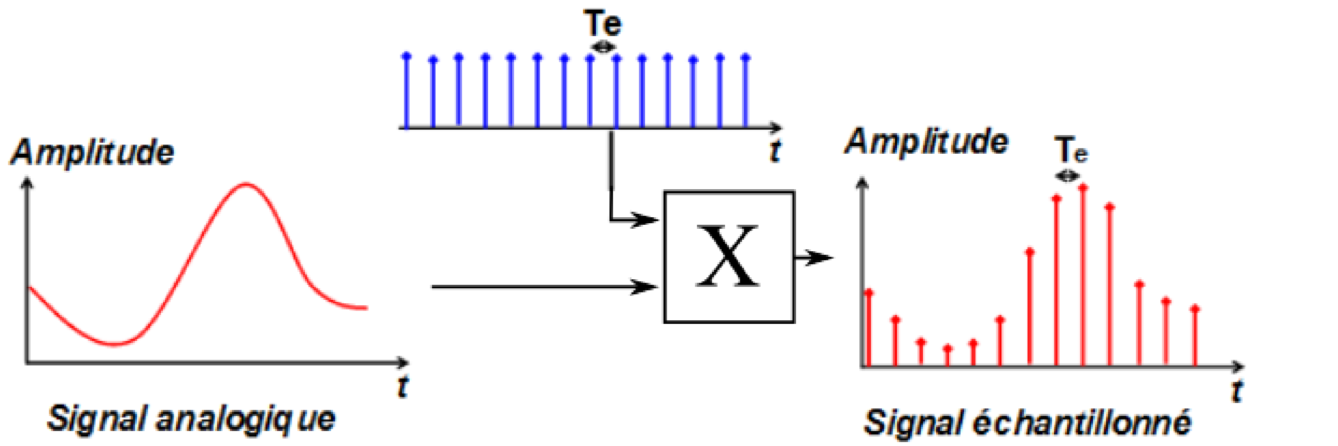


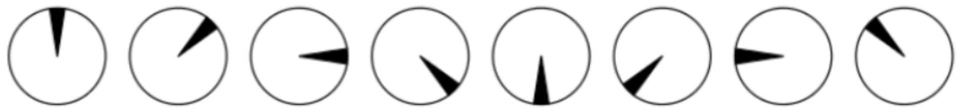
FIGURE 2 – *Schéma de principe de l'échantillonnage analogique. A gauche, le signal analogique $x(t)$, en haut le train d'échantillons $f(t)$. A droite, le signal échantillonné.*

1.2 Lien avec l'effet stroboscopique

Tout le monde a pu constater, en regardant un film où les véhicules possèdent des roues à barreaux, que les roues ne tournent pas à la bonne vitesse, voire dans le mauvais sens. Cela est du à une inadéquation entre la fréquence de rafraichissement des images (24 images par seconde en général), la vitesse de rotation et le nombre de barreaux des roues.

L'expérience suivante permet d'illustrer ce phénomène : on considère un disque blanc avec un secteur noir, en rotation à vitesse constante, à la fréquence $f = \frac{1}{T}$.

On observe ce disque dans l'obscurité. Un stroboscope éclaire le disque par éclairs, à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$. On observe quelque chose comme ceci :

— Pour $T_e = \dfrac{T}{8}$: 

— Pour $T_e = \dfrac{T}{2}$: 

— Pour $T_e = \dfrac{3T}{4}$: 

On constate que dans le premier cas, le disque semble tourner dans le bon sens, dans le second on ne peut déterminer le sens de rotation, et dans le troisième dans le mauvais sens. Dans ce dernier cas il y a sous-échantillonnage : le signal échantillonné est sans rapport avec le signal réel.

On pourra regarder : `https://www.youtube.com/watch?v=CaiIZI1oe40` et `https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=mODqQvlrgIQ&feature=emb_logo`.

2 Spectre du signal échantillonné. Théorème de Nyquist-Shannon

2.1 Description du spectre du signal échantillonné

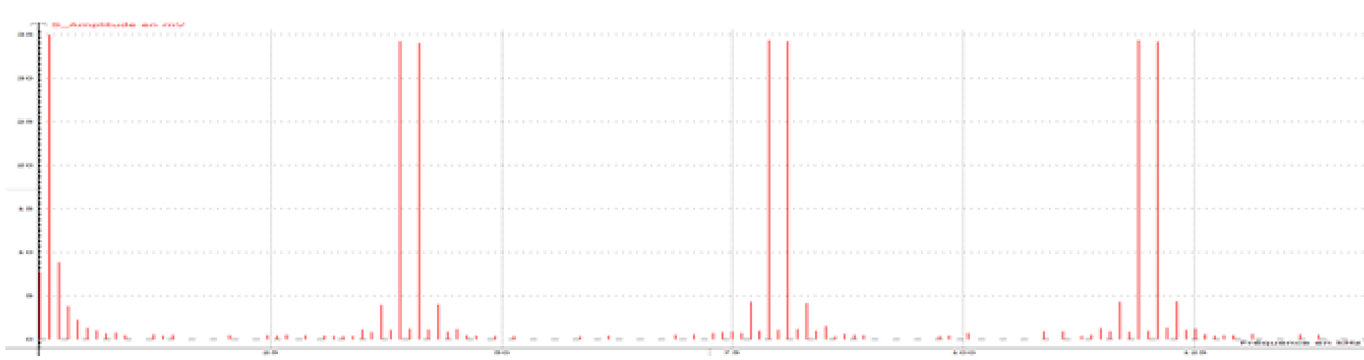
Procédure à suivre :

— Ouvrir avec LatisPro le fichier Triangle_echantillon (situé dans le site cahier de prépa). Ce signal triangulaire, de fréquence $f = 1$ kHz, est échantillonné à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 40$ kHz.

— Ouvrir l'outil d'analyse de Fourier : Traitements / Calculs spécifiques / Analyse de Fourier / Calcul . Choisir la courbe à analyser (Triangle) puis ouvrir l'onglet Avancé. Cliquer sur "Sélection de périodes : Manuelle". Sélectionner du mieux possible un nombre entier de périodes du signal Triangle puis appuyer sur "nouvelle courbe".

— Zoomer afin d'observer quatre ou cinq motifs du spectre.

Un exemple de spectre obtenu est représenté ci-dessous :



❑ **1** — Que représente le premier motif, observable aux basses fréquences ?

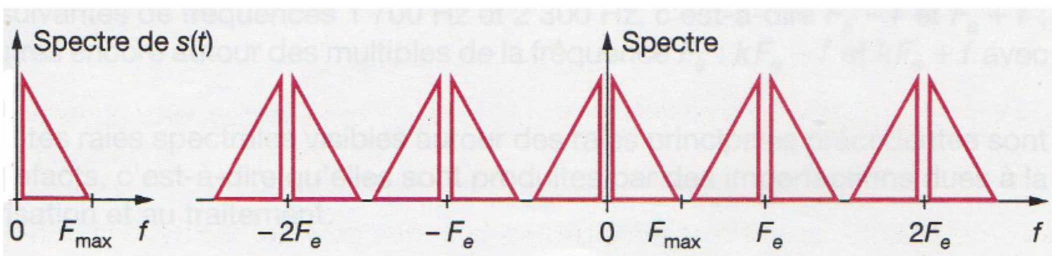
❑ **2** — Compléter cette figure pour décrire et analyser le spectre obtenu.

❑ **3** — Faire des mesures pour quantifier votre analyse (on rappelle que le signal triangulaire est échantillonné à la fréquence $f_e = 40$ kHz, et que sa fréquence vaut $f = 1$ kHz).

2.2 Théorème de Nyquist-Shannon

Les observations sur la courbe précédente (le spectre du signal échantillonné s'obtient par périodisation à fréquence d'échantillonnage f_e du spectre d'origine du signal analogique, ainsi que de son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) sont généralisables.

Cette généralisation constitue le théorème de Nyquist-Shannon, et peut être illustrée graphiquement de la manière suivante :



A la suite de ces observations, on retiendra le résultat suivant :

Un signal est correctement représenté à partir de ses échantillons, si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à deux fois la fréquence maximale de son spectre.

Autrement dit :

$$f_e > 2f_{\max} \Longleftrightarrow T_e < \frac{T_{\max}}{2}$$

Un exemple d'application de ce théorème est fourni par le format des CD musicaux. La fréquence d'échantillonnage a été fixée à 44 kHz, supérieure au double de la fréquence maximale audible par une oreille humaine, qui est de l'ordre de 20 kHz.

3 Application à un signal de spectre limité en fréquence

3.1 Paramétrage de l'acquisition

Nous allons paramétrer l'acquisition d'un signal sinusoïdal de fréquence $f = 1$ kHz.

❑ **4** — Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale permettant une bonne reconstitution du signal. Donner une fréquence plus grande permettant une bonne reconstitution du signal.

Procédure à suivre

—Régler le signal sinusoïdal au GBF, et l'envoyer sur l'entrée EA0 du boîtier d'acquisition.

—Dans la fenêtre Acquisition située à gauche de l'écran, cliquer, dans la sous-fenêtre Entrées Analogiques, sur EA0.
—Paramétrage de la sous-fenêtre Acquisition :

- **Points** : nombre d'échantillons prélevés sur le signal. Latis Pro propose 256000 points maximum pour l'ensemble des voies à acquérir, et pour chaque séance d'acquisition.
- **Total** : durée totale de l'acquisition.
- **T**$_e$: période d'échantillonnage, c'est-à-dire la durée entre deux prélèvements d'échantillons successifs.

On retiendra :

$$\boxed{\text{Total} = \text{T}_\text{e} \times \text{Points}}$$

—Le déclenchement correspond à la synchronisation du signal. Par défaut, Latis Pro n'en propose aucun. Les réglages sont semblables à ceux d'un oscilloscope :

- Choisir comme Source (= signal de synchronisation) : EA0.
- Choisir comme Sens : Montant (= synchronisation sur les fronts montants).
- Choisir comme Seuil : 0 V (= seuil de déclenchement).

❏ **5** — Mesurer la fréquence du signal (par exemple avec Mesures Automatiques) et observer son spectre.

❏ **6** — Conclure : quelle est la fréquence mesurée ? Le signal est-il bien reconstitué ?

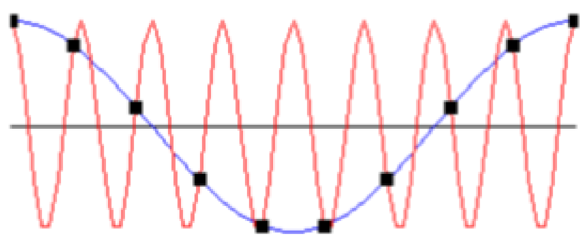
3.2 Problèmes de sous-échantillonnage

❏ **7** — Remplacer T_e par 667 μs. Le signal est-il conforme à ce qui est attendu ?

❏ **8** — Mesurer sa fréquence et observer son spectre.

❏ **9** — Conclure.

—Explication dans le domaine temporel :



—Explication dans le domaine fréquentiel :

Le théorème de Shannon impose qu'il faut prélever au moins deux échantillons par période pour ne pas perdre d'informations sur le signal. Les problèmes précédemment constatés pour la mesure de fréquence du signal sont donc liés au non-respect de la condition $T_e < T/2$.

4 Travail en Python

On se propose de créer puis d'obtenir le spectre d'un signal élémentaire, de durée $\Delta t = 0.2$s, se décomposant en un signal sinusoïdal de fréquence $f = 30$ Hz et d'amplitude $A = 1$ V, superposé à un "bruit" de plus haute fréquence $f_b = 290$Hz et d'amplitude $A_b = 0,6$ V :

$$e(t) = A\sin(2\pi f t) + A_b \sin(2\pi f_b t)$$

4.1 Obtention du signal échantillonné

❑ **10** — On souhaite échantillonner ce signal sur l'intervalle de $[0, 0.2]$ à une fréquence d'échantillonnage $f_e = 2000$Hz. Quel est le nombre N_e d'échantillons nécessaires ?

❑ **11** — A l'aide de la fonction `linspace` du module `numpy`, créer un tel signal. On pourra s'aider de l'aide :

```
help(numpy.linspace)

""" Return evenly spaced numbers over a specified interval.
Returns num evenly spaced samples, calculated over the interval [start, stop].

Examples
    --------
np.linspace(2.0, 3.0, num=5)
    array([2.  , 2.25, 2.5 , 2.75, 3.  ]) """
```

```
import numpy as np

f_e = 2000
N_e =
t = ...
def e_ech(t):
  Ne = len(t)
  A = ...
  Ab = ...
  ...
  ...
  f = np.zeros(Ne)
  for i in range(Ne):

  return
```

❑ **12** — Tracer la fonction obtenue avec la fonction `plot` du module `matplotlib.pyplot`. On l'affichera avec un trait pointillé d'épaisseur 2 et des carrés d'épaisseur 10. On utilisera les fonctions `xlabel` et `ylabel` du module pour donner des noms aux axes. L'aide donne :

```
help(plt.plot)

""" plot(x,y, **kwargs)
```

```
    Plot y versus x as lines and/or markers."""

plot(x, y)        # plot x and y using default line style and color
plot(x, y, 'bo')  # plot x and y using blue circle markers

""" Further options:"""

plot(x, y, color='green', marker='o', linestyle='dashed',
     linewidth=2, markersize=12) #plot x and y with circle markers and a dashed
    green line
```

4.2 Obtention du spectre du signal

Pour obtenir le spectre de la fonction créée, on utilisera la fonction `fft.fft` du module `numpy` qui utilise l'algorithme de transformée de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform*) pour calculer le spectre du signal. Cette fonction prend en argument le tableau de valeur `y` contenant les valeurs de la fonction échantillonnée à la question précédente. Elle renvoie le tableau des coefficients de Fourier complexes `coeff` [1].

```
coeff = np.fft.fft(y)
```

❏ **13** — Créer ensuite un tableau numpy `spectre` tel que :

$$\texttt{spectre}[0] = \frac{|\texttt{coeff}[0]|}{N_e}$$
$$\texttt{spectre}[i] = \frac{2|\texttt{coeff}[i]|}{N_e}$$

❏ **14** — Créer le tableau `freq` $= [0, \frac{1}{\Delta t}, \frac{2}{\Delta t}, ..., \frac{N_e - 1}{\Delta t}]$.

❏ **15** — Tracer l'évolution de `spectre` en fonction de `freq` pour obtenir le spectre du signal. Donner des noms aux deux axes. Vérifier la cohérence du spectre obtenu.

❏ **16** — Recommencer toute la démarche avec une fréquence pour le bruit de $f_b = 1300$ Hz.

1. La théorie des séries de Fourier ayant disparu du programme de Maths depuis bien longtemps, la définition et le sens des ces coefficients ne sont pas à connaître... et je ne peux pas les expliquer en 5 minutes.