Correction TD n°12

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
$\star$ Exercice niveau CCP
$\bullet$ Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
$\diamond$ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Conduction électrolytique

1. $\vec{j} = n^\star q\vec{v} = \sigma\vec{E} \Rightarrow \boxed{\mu = \dfrac{\sigma}{n^\star q}}$
2. Si $q > 0$, la charge se déplace dans le sens du champ électrique d'après la force de Lorentz. Donc $\vec{v}$ et $\vec{E}$ sont de même sens et $\mu > 0$. Si $q < 0$, la charge se déplace dans le sens opposé au champ électrique. $\vec{v}$ et $\vec{E}$ sont de sens opposé et $\mu < 0$. Etant donné que $\sigma = n^\star q\mu$, la conductivité est bien toujours positive.
3. Si on a plusieurs porteurs de charge, la relation se généralise en :
$$\sigma = \sum_i n_i^\star q_i \mu_i$$
4. Sachant que $n^\star = c\mathcal{N}_A$ avec c la concentration <u>en mol.m^{-3}</u>, on a :
$$\sigma = \sum_i c_i \mathcal{N}_{\mathcal{A}} q_i \mu_i = \sum_i \lambda_i c_i$$
avec $\lambda_i = \mathcal{N}_{\mathcal{A}} q_i \mu_i$ la conductivité ionique molaire de l'espèce i. On retrouve la loi de Kohlrausch.
5. Les seules espèces ioniques présentes dans l'eau pure sont les ions H_3O^+ et HO^-. Leur concentration vaut $c = 10^{-7}$mol.L^{-1} = 10^{-4}mol.m^{-3}. Leur densité volumique vaut donc $n^\star = 6,02.10^{19}$m^{-3}. La conductivité de l'eau pure vaut :
$$\sigma = n^\star e(\mu_{H_3O^+} - \mu_{HO^-}) = 5,65.10^{-6}\text{S.m}^{-1}$$
6. Une solution d'acide chlorydrique contient des ions Cl^-, H_3O^+ et HO^-. On a :
$$[Cl^-] = [H_3O^+] = 10^2\text{mol.m}^{-3} \quad [HO^-] = 10^{-10}\text{mol.m}^{-3}$$
Les ions hydronium sont donc en quantité négligeable. On en déduit :
$$\sigma_{HCl} = n^\star e(\mu_{H_3O^+} - \mu_{Cl^-}) = 4,4\text{S.m}^{-1}$$

Décharge d'une barre

1. Notons $\rho_0(t)$ la densité volumique de charge dans la barre, supposée uniforme. On a $Q(t) = \rho_0(t)\pi R^2 a$ et $q(t) = \rho_0(t)\pi R^2(a-x)$ d'où :
$$\boxed{q(t) = Q(t)\frac{a-x}{a}}$$
2. D'après la conservation de la charge, on a $\mathrm{d}q = -i(x,t)\mathrm{d}t \Rightarrow i(x,t) = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\frac{a-x}{a}$. La densité de courant vaut :
$$\boxed{j(x,t) = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(t)\frac{a-x}{a\pi R^2}}$$

Axones

1. $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ avec $[\vec{j}]$ = A.m^{-2}, $[\vec{E}] =$ V.m^{-1} et $\gamma =$ S.m^{-1}.
2. On fait un bilan comme dans le cours pour en déduire $R_a = \frac{\ell\rho_a}{\pi r_1^2}$ (on rappelle que la résistivité est l'inverse de la conductivité).
3. Notons $I_f(r)$ le courant radial de fuite le long de l'axone. Cette intensité est égale à la quantité de charges traversant la surface latérale $S(r)$ d'un cylindre de rayon r compris entre r_1 et $r_1 + e$ et de longueur ℓ par unité de temps :
$$I_f(r) = \iint_{S(r)} \vec{j}_{\text{rad}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = j_{\text{rad}}(r)2\pi r\ell$$
Or, en régime permanent, le vecteur $\vec{j}_{\text{rad}}$ est à flux conservatif. Donc :
$$I_f(r) = \text{cste}$$

On peut donc écrire :

$$j_{\text{rad}}(r) = \frac{I_f}{2\pi r \ell}$$

En appliquant la loi d'Ohm locale, on obtient :

$$-\frac{1}{\rho_m}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{I_f}{2\pi r \ell}$$

puis, en intégrant entre r_1 et $r_1 + e$:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho_m}\int_{r_1}^{r_1+e}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r)\mathrm{d}r &= \int_{r_1}^{r_1+e}\frac{I_f}{2\pi r \ell} \\
\frac{1}{\rho_m}(V(r_1) - V(r_1+e)) &= \frac{I_f}{2\pi\ell}\ln\frac{r_1+e}{r_1} \\
(V(r_1) - V(r_1+e)) &= \left(\frac{\rho_m}{2\pi\ell}\ln\frac{r_1+e}{r_1}\right) I_f
\end{aligned}$$

On en déduit la résistance de fuite :

$$\boxed{R_f = \frac{\rho_m}{2\pi\ell}\ln\frac{r_1+e}{r_1}}$$

4. Les deux résistances sont égales si :

$$\frac{\ell\rho_a}{\pi r_1^2} = \frac{\rho_m}{2\pi\ell}\ln\frac{r_1+e}{r_1} \Rightarrow \lambda = ...$$

Remarque : si la membrane lipidique a une épaisseur faible devant le rayon interne de l'axone, on peut effectuer un DL à l'ordre 1 en e/r_1 dans le logarithme et on obtient :

$$R_f = \frac{\rho_m}{2\pi\ell}\ln\left(1 + \frac{e}{r_1}\right) \approx \frac{\rho_m e}{2\pi r_1 \ell}$$

On retombe alors dans ce cas sur la formule vue pour le cas axial :

$$R_f = \frac{e}{\lambda_m S}$$

où λ_m est la conductivité électrique de la double couche lipidique et S sa surface latérale.

Protection électrique

1. $R_b = \frac{\rho\ell}{S}$.
2. On divise la surface du sol en petites couches d'épaisseur dr comme sur le schéma. La surface intérieure d'une couche située à une distance r de la protection métallique vaut $S = 2\pi r L + 2\pi r^2$ (surface latérale d'un cylindre + demi-sphère). La résistance d'une couche vaut donc : $\mathrm{d}R = \frac{\rho \mathrm{d}r}{2\pi r L + 2\pi r^2}$. Le sol étant constitué de l'association série de toutes les couches de $r = r_T$ à $r = \infty$, on en déduit la formule fournie.