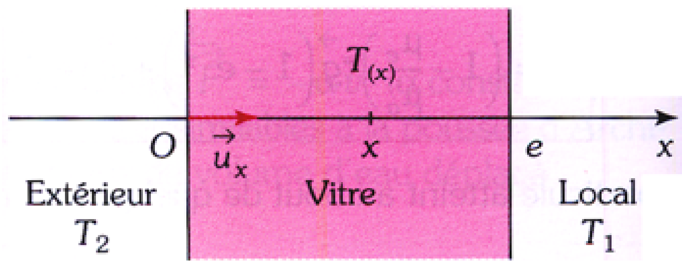
TD n°13 Diffusion thermique

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆ Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Etude d'un double vitrage⋆

Un local est maintenu à la température T_1 =300K, alors que la température extérieure est $T_2 = 315$ K. On étudie les transferts thermiques par conduction à travers les surfaces vitrées de la pièce, de surface totale $S = 6,5$ m^2. Chaque vitre a une épaisseur $e = 5,0$ mm et le verre a une capacité thermique massique c et une masse volumique μ, ainsi qu'une conductivité thermique $\lambda = 1,0$ W.m^{-1}.K^{-1}.On suppose le problème unidimensionnel.



1. Faire un bilan d'énergie dans un volume élémentaire de section S et d'épaisseur dx. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $T(x,t)$ à l'intérieur du vitrage.

2. Déterminer en régime stationnaire l'expression de $T(x)$. En déduire le flux thermique ϕ_1 qui traverse la surface vitrée en fonction de λ, S, e, T_1 et T_2 et calculer sa valeur numérique.

3. En déduire la résistance thermique de la surface vitrée.

   On remplace les vitres précédentes par des vitres constituées par une épaisseur e_1 de verre, e_2 d'air puis à nouveau e_1 de verre, telles que : $2e_1 = e_2 = e = 5,0$ mm. On donne $\lambda_{\text{air}} = 2,6.10^{-2}$ W.m^{-1}.K^{-1}.

4. Déterminer l'expression du flux thermique ϕ_2 en régime permanent et le comparer à ϕ_1.

2. Isolation thermique d'un tube cylindrique

Un tube cylindrique de rayon a, à la température $T_1 = 304$ K, est séparé de l'extérieur, à la température $T_2 = 275$ K, par une gaine cylindrique d'épaisseur e, constituée d'un matériau de conductivité thermique $\lambda = 0,9$ unités S.I.

1. Donner l'expression de la résistance thermique de la gaine sur une longueur ℓ
2. Trouver la puissance thermique qui traverse la gaine sur une longueur ℓ. Faire l'application numérique, avec $a = 20$ cm, $e = 4$ cm et $\ell = 1$ m.

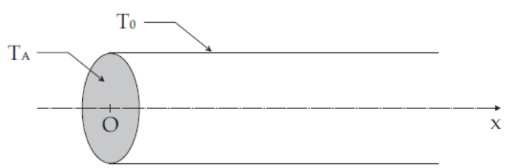
3. Igloo⋆

Quatre explorateurs sur la banquise construisent un igloo de rayon R pour s'abriter du froid. Les murs sont d'épaisseur $e = 50$ cm et chaque explorateur dégage une puissance de 50 W. L'igloo est fait de neige tassée de conductivité thermique 0,5 W.m^{-1}.K^{-1}.

1. Montrer que le flux sortant d'une demi-sphère de rayon $R \leq r \leq R+e$ ne dépend pas de son rayon.
2. En déduire la résistance thermique de l'igloo.
3. Les explorateurs ont-ils intérêt à construire un igloo de grande ou petite taille ?
4. L'igloo a un rayon intérieur de 1m et la température externe est de -10°C. Déterminer la température interne en régime permanent.

4. Transmission thermique par une barre cylindrique avec fuite conducto-convective

On considère une barre de cuivre homogène, de section droite d'aire S et de périmètre L, de longueur très grande (hypothèse qu'il conviendra de préciser au cours de la résolution). En $x = 0$, la barre est mise en contact thermique avec un milieu à température T_A uniforme et constante. La surface latérale de la barre est en contact avec l'air ambiant, de température T_0 uniforme et constante.



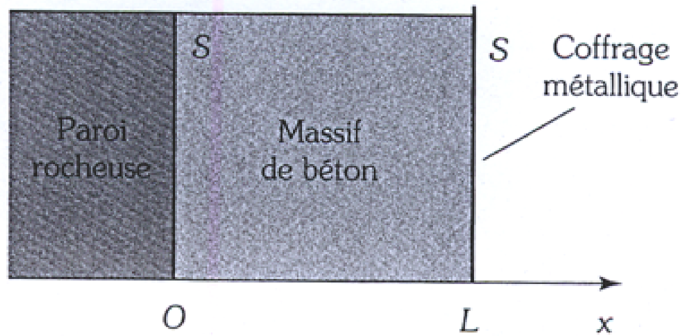
On désigne par λ la conductivité thermique du cuivre, et par h le coefficient de transfert conductoconvectif avec l'air (les deux paramètres étant supposés constants sur la gamme de température envisag ée). On se propose d'étudier le champ de température $T(x)$ dans la barre en régime stationnaire. On posera : $\theta(x) = T(x) - T_0$ (écart avec la température ambiante).

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(x)$. On introduira une longueur caractéristique a. En déduire l'expression de $\theta(x)$ et également celle du flux conductif thermique Φ_{cd} à travers la section de la barre d'abscisse x. A.N. On donne : $\lambda = 400$ W/m/K, $h = 8$W/m2/K. La barre est un cylindre à section droite circulaire de diamètre $d = 2$ cm. Calculer a dans ces conditions.

2. La longueur $x_{\max}$ de la barre est supposée telle que $x_{\max} a >> 1$. Définir, puis calculer sa conductance thermique.

5. Conduction thermique dans le béton•

Pour consolider une paroi rocheuse, plane et isotherme de température T_0, on coule un massif de béton, de conductivité thermique λ. Ce massif est limité de l'autre côté par un coffrage métallique, plan, de température uniforme $T_C < T_0$. Le coffrage est supposé très bon conducteur thermique :



La température du coffrage est maintenue constante par aspersion d'eau. La prise du béton correspond à une réaction chimique exothermique. On note p la puissance volumique thermique dégagée dans la masse de béton.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ du massif de béton.

2. En déduire l'expression de $T(x)$.

3. Calculer le vecteur densité de flux thermique $j_{th}(x)$. Montrer que si p est supérieure à une certaine valeur p_0, le signe du vecteur densité de flux thermique n'est pas le même dans toute l'épaisseur du béton. Donner l'expression de p_0 en fonction des paramètres du problème.

6. Evolution de la température du corps humain lors d'une plongée•

Le but de cet exercice est de décrire les processus de transfert d'énergie entre le corps d'un plongeur sous-marin et l'eau. Dans ce problème, nous noterons $T_{\text{int}}(t)$ la température interne du plongeur et $T_{\text{ext}} = 15°$C la température de l'eau.

- L'ensemble {corps humain + derme} possède une résistance de conduction thermique notée R_1 ;
- Le plongeur est équipé d'une combinaison d'épaisseur e. On note R_{comb} la résistance thermique associée ;
- Les transferts convectifs entre la paroi externe de la combinaison et l'eau sont modélisés par la loi de Newton donnant le flux convectif :

$$\Phi_{\text{conv}} = -hS(T_{\text{ext}} - T_{\text{paroi}})$$

où S est l'aire de l'interface et h un paramètre phénoménologique décrivant la convection. On note R_{conv} la résistance thermique au transport convectif ;

— Les transferts radiatifs entre la paroi et l'extérieur sont modélisés par le flux radiatif global : $\Phi_{\text{rad}} = \varepsilon\sigma(T_{\text{paroi}}^4 - T_{\text{ext}}^4)$ où $\sigma = 5,7.10^{-8}$SI est la constante de Stefan et ε le paramètre d'émissivité traduisant l'efficacité des processus radiatifs. On note R_{ray} la résistance thermique au transport radiatif.

1. Proposer le schéma électrique équivalent permettant de déterminer la résistance totale R_{tot} au transport thermique entre l'intérieur du corps humain et l'eau en fonction des autres résistances.
2. Exprimer le flux thermique global entre le corps humain et l'eau $\Phi_{th}(t)$ en fonction de $T_{\text{int}}(t)$, T_{ext} et R_{tot}.
3. Exprimer la résistance de convection en fonction de h et S. On néglige dans la suite le processus de transfert radiatif.
4. Le corps humain dégage de l'énergie thermique grâce aux molécules d'ATP. On note $\mathscr{P}_{ATP}$ la puissance associée à cette production interne. On note c la capacité thermique massique du corps humain, M la masse du plongeur.
   (a) Etablir une équation différentielle vérifiée par la température $T_{\text{int}}(t)$ du plongeur.
   (b) En supposant $\mathscr{P}_{ATP}$ constant dans le temps, déterminer l'évolution de la température $T_{\text{int}}(t)$ en fonction de $R_{\text{tot}}, T_{\text{ext}}, \mathscr{P}_{ATP}, T_{\text{int}}(t=0) = 37°\text{C}$, c et M.
   (c) L'état d'hypothermie est atteint lorsque la température du plongeur tombe en dessous de $T_{\text{int}} = 308\text{K}$. Déterminer et calculer le temps t_h au bout duquel l'hypothermie est atteinte.

Données :

— capacité thermique du corps humain : $c \approx 3,5$ kJ.kg^{-1}.K^{-1},

— résistance thermique de la peau humaine : $R_1 = 3.10^{-2}$K.W^{-1},

— Energie journalière fournie par le métabolisme humain : 2400 kcal. On rappelle qu'une calorie correspond à la quantité d'énergie en Joule nécessaire pour échauffer 1g d'eau de 1°C.

— Conductivité thermique du néoprène : 0,2W.m^{-1}.K,

— Epaisseurs "classiques" d'une combinaison de plongée : 3mm

— Coefficient conducto-convectif : $h = 10$W.m^{-2}.K^{-1}

— Les autres valeurs nécessaires pourront ête choisis par le candidat.

7. Gel d'un lac

On étudie la formation d'une couche de glace à la surface d'un lac. La température de l'air en surface est $T_s = 10°$C alors que l'eau liquide du lac est à sa température de fusion T_f. On note $e(t)$ l'épaisseur de la couche de glace à l'instant t et on suppose que $e(t=0) = 0$.

1. Exprimer la densité de courant thermique $\vec{j}_Q$ dans la couche de glace en régime stationnaire en fonction de e notamment.
2. On note de l'épaisseur de glace formée entre t et $t+\text{d}t$. Exprimer de en fonction de $\vec{j}_Q$, de l'enthalpie de fusion de la glace ℓ_{fus} et de sa masse volumique ρ. En déduire une équation différentielle vérifiée par $e(t)$.
3. Résoudre cette équation et déterminer l'épaisseur formée au bout d'une journée, d'une semaine et d'un mois. Commenter.

Données : caractéristiques de la glace.

— Conductivité thermique : $\lambda = 2,1$ W.m^{-1}.K^{-1},

— Masse volumique : $\rho = 917$ kg.m^{-3},

— Enthalpie de fusion :$\ell_{fus} = 333$ kJ.kg^{-1}

8. Résolution de problème : métabolisme d'un mammifère⋄

Sachant que pour survivre, les mammifères marins doivent maintenir une température de surface au moins égale à $T_1 = 30°$C, déterminer la valeur de la puissance thermique volumique que doit produire leur métabolisme pour qu'ils puissent survivre dans une eau à $T_0 = 20°$C.