TD n°14 Diffusion de particules

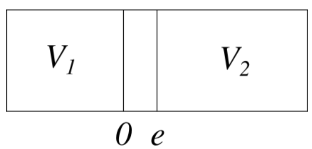
ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆ Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Diffusion à travers une membrane•

Dans cet exercice, on se propose de travailler avec un flux molaire plutôt qu'un flux de particules ; le rapport entre les deux flux est égal au nombre d'Avogadro.

La diffusion de molécules à travers une membrane est utilisée dans des domaines très divers, en médecine par exemple. On considère le dispositif représenté ci-dessous :



Les deux compartiments, séparés par une membrane verticale poreuse, contiennent une même solution moléculaire, mais à des concentrations molaires différentes c_1 et c_2 ($c_1 > c_2$). Leurs volumes constants seront notés respectivement V_1 et V_2.

La membrane, de surface S et d'épaisseur e, comporte par unité de surface N pores cylindriques, d'axe horizontal normal à la paroi. Les pores sont supposés identiques. Dans chacun d'eux s'établit un flux macroscopique de molécules suivant (Ox) de densité molaire $\vec{j}_c$ tendant à égaliser les concentrations. On admettra que $\vec{j}_c$ est donné par la loi de Fick, le coefficient de diffusion étant égal à D.

A une date t les concentrations, maintenues homogènes sur les volumes V_1 et V_2, sont $c_1(t)$ et $c_2(t)$. On notera $\Delta c(t) = c_1(t) - c_2(t)$.

1. En admettant que dans un pore la concentration soit une fonction affine de x, montrer que la densité de flux molaire $\vec{j}_c$ des molécules à travers toute la membrane est de la forme :
$$\vec{j}_c = K\Delta c\vec{u}_x$$
On donnera K, appelé perméabilité de la membrane, en fonction de N, D, e et r rayon d'un pore.

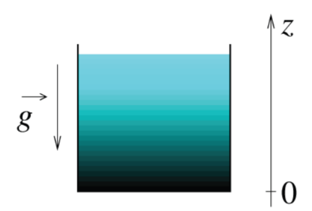
2. Calculer la valeur numérique de r. *Données :* $K = 10^{-6}$ m.s^{-1} , $N = 10^6$ pores par cm^2, $e = 10\mu$m et $D = 10^{-9}$m^2.s^{-1}.

3. Etablir l'équation différentielle donnant $\Delta c(t)$.

4. Intégrer cette équation. On notera : $\alpha = KS\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)$. Au bout de quelle durée la différence des concentrations est-elle égale au dixième de sa valeur initiale ? *Données* : $V_1 = 2$L, $V_2 = 1$L et $S = 200$cm^2.

2. Sédimentation de protéines⋆

Un récipient contient un liquide homogène de masse volumique ρ, dans lequel on ajoute des protéines insolubles de masse volumique $\rho_0 > \rho$.



La solution obtenue est maintenue homogène jusqu'à la date $t = 0$. A partir de cet instant, elle est abandonnée à elle-même et, sous l'action des forces de pesanteur, les macromolécules se déplacent vers le fond du récipient. On repère le mouvement des particules avec un axe (Oz) vertical ascendant, l'origine O étant prise au fond du récipient.

Le mouvement est supposé unidirectionnel vertical et les protéines soumises, entre autres, à une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ (où α est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse des protéines).

On rappelle que le produit de la constante de Boltzmann k_B par le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A$ est égal à la constante des gaz parfaits : $R = k_B.\mathcal{N}_A$ = 8,31 J.K^{-1}.mol^{-1}.

1. Quelles sont les forces auxquelles sont soumise chaque protéine ? En déduire l'équation différentielle du mouvement d'une protéine de masse m et montrer que ces particules atteignent une vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}}$ dont on donnera l'expression.

2. Cette vitesse limite étant atteinte rapidement, exprimer la densité de courant d'entrainement moléculaire $\vec{j}_E(z)$ des protéines à l'altitude z où leur concentration molaire est $c(z)$ en introduisant la masse molaire M des protéines.

3. Justifier qu'il existe un courant ascendant de vecteur densité de courant $\vec{j}_N(z)$. On note D le coefficient de diffusion ; donner alors l'expression de $\vec{j}_N(z)$ à l'aide de la fonction $c(z)$, de D et $\mathcal{N}_A$.

4. Déterminer en régime stationnaire, l'expression de la fonction $c(z)$.

5. On donne la relation d'Einstein : $D = \frac{k_B T}{\alpha}$ et $g = 9,8$ m.s^{-2}. Des mesures optiques montrent que, à 25°C, $c(z=0) = 2c(z=2cm)$. En déduire la masse molaire M des protéines ; commenter.

3. Réacteur nucléaire•

Le fonctionnement du coeur d'un réacteur nucléaire limité par deux plans d'abscisse $x = \pm\frac{a}{2}$ et de section S est modélisé à 1D par :

— une production volumique par unité de temps σ de neutrons provenant des réactions de fission, avec $\sigma = \frac{n(x,t)}{\tau}$ où $n(x,t)$ est la densité volumique de neutrons ;

— une zone de piégeage appelée couverture : pour $x \geq \frac{a}{2}$ ou $x \leq \frac{a}{2}$, on a $n = 0$.

La diffusion dans le coeur obéit à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D.

1. Établir l'équation vérifiée par $n(x,t)$. Quelle est la signification de τ ? Quelle serait l'évolution temporelle de n à x fixé sans le phénomène de diffusion ? Commenter.
2. Déterminer $n(x)$ en régime permanent, en supposant que n ne s'annule pas pour $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$. En déduire qu'il existe une condition liant τ à D et a. Que se passe-t-il si τ est inférieur à la valeur requise ? Exprimer $n(x)$ en fonction de a, S et N_0, le nombre total de neutrons dans le réacteur. Quelle est la densité maximale des neutrons ?
3. Déterminer le flux de neutrons vers les zones de couverture. Comparer le flux total sortant à la production totale de neutrons.
4. Lors d'un arrêt d'urgence, des barres de piégeage plongent dans le coeur du réacteur. Le taux de production volumique global des neutrons peut alors être négatif (si le piégeage l'emporte sur la fission) : $\sigma = -\frac{n(x,t)}{\tau'}$ algébrique. Rechercher la solution de l'équation de diffusion sous la forme $n(x,t) = f(x)g(t)$. On suppose que le régime permanent était atteint à l'instant$t = 0$. En déduire le type de régime obtenu selon la valeur de τ'.

4. Résolution de problème : Taille critique d'une bactérie◇

Pour vivre, une bactérie aérobie a besoin de consommer le dioxygène dissous dans l'eau au voisinage de sa surface.

Déterminer la taille maximale que peut avoir une bactérie aérobie pour qu'elle ne suffoque pas.

Données :

— Coefficient de diffusion du dioxygène dans l'eau $D = 2.10^{-9}$ m^2.s^{-1}.

— Taux horaire de consommation de O_2 d'une bactérie aérobie par unité de masse : $A = 0,02$ mol.kg^{-1}.s^{-1}.