Correction TD n°13

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆ Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Double vitrage

Les questions 1. 2. et 3. sont traitées dans le cours.

Pour la question 4, il suffit de calculer la résistance thermique équivalente au double vitrage et d'appliquer la loi d'Ohm. Les couches de verre et d'air étant traversées par le même flux, les résistances thermiques sont en série. On a donc :

$$R_{\text{tot}} = 2R_{\text{verre}} + R_{\text{air}} = 2\frac{e_2}{\lambda S} + \frac{e_1}{\lambda_{\text{air}} S}$$

et :

$$\phi_2 = \frac{T_2 - T_1}{R_{\text{tot}}} < \phi_1$$

Conduction thermique dans le béton

On se place en régime permanent.

1. On effectue un bilan sur une petite couche d'épaisseur de béton comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2U &= \delta Q_e - \delta Q_s + \delta^2 Q_p = 0 \\ &\Rightarrow \Phi_{\text{th}}(x)\mathrm{d}t - \Phi_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}t + p\mathrm{d}xS\mathrm{d}t = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{th}}}{\mathrm{d}x}(x) = pS \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\Phi_{\text{th}}(x) = j_Q(x)S = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)S$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ dans le béton :

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}(x) = -\frac{p}{\lambda}$$

On peut aussi retrouver cette équation en reprenant l'équation du cours et en se plaçant directement en régime permanent.

2. En intégrant deux fois et en utilisant les deux conditions aux limites, on obtient :

$$T(x) = -\frac{p}{2\lambda}x^2 + \left(\frac{T_c - T_0}{L} + \frac{pL}{2\lambda}\right)x + T_0$$

3. Le vecteur $\vec{j}_Q(x)$ s'obtient avec la loi de Fourier :

$$\vec{j}_Q(x) = \left(px - \lambda\left(\frac{T_c - T_0}{L} + \frac{pL}{2\lambda}\right)\right)\vec{u}_x$$

Le vecteur $\vec{j}_Q$ change de sens s'il existe une valeur x_{max} telle que $j_Q(x_{\text{max}}) = 0$. Effectuons un petit tableau de signe de $\vec{j}_Q(x)$:

x	0		x_{max}		L
$j_Q(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	T_0	↗	T_{max}	↘	T_c

La valeur de $x_{\max}$ vaut :

$$x_{\max} = \frac{L}{2} - \lambda \frac{T_0 - T_c}{pL}$$

On remarque que $x_{\max} < \frac{L}{2}$ car $T_0 > T_c$.

Pour que le vecteur $\vec{j}_Q$ change de sens *dans le béton*, il suffit que $x_{\max} > 0$. On en déduit :

$$p > 2\lambda \frac{T_0 - T_c}{pL^2}$$

Transmission thermique dans une barre cylindrique avec fuite conducto-convective

1. On fait un bilan de chaleur en régime permanent sur une petite tranche de cylindre de longueur dx. Attention, δQ_s contient maintenant deux termes :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{d}U) = 0 &= \delta Q_e - \delta Q_s \\ 0 &= j_Q(x)S\mathrm{d}t - j_Q(x+\mathrm{d}x)S\mathrm{d}t - L\mathrm{d}xh(T(x) - T_0)\mathrm{d}t \\ 0 &= \lambda \frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}(x)S - Lh(T(x) - T_0) \end{aligned}$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par θ :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2}(x) - \frac{\theta(x)}{a^2} = 0}$$

avec $a = \sqrt{\frac{\lambda S}{Lh}}$.
Remarque : on voit apparaître un signe - dans cette équation. Cela ne signifie pas pour autant que le système est "instable". En effet, la variable est ici une variable d'espace x et non le temps t.

La solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$\theta(x) = \theta_1 \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} + \theta_2 \mathrm{e}^{\frac{x}{a}}$$

En supposant la longueur de la barre beaucoup plus grande que a, le premier terme diverge pour $x >> a$ ce qui est physiquement impossible. Donc $\theta_1 = 0$. Par ailleurs, la condition initiale donne $\theta_2 = T_A - T_0$. On en déduit :

$$\boxed{\theta(x) = (T_A - T_0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}}$$

L'expression du flux thermique est :

$$\Phi_{th}(x) = \frac{\lambda S}{a}(T_A - T_0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}$$

La valeur numérique de a vaut : $a = 0,5$m. *Remarque : dans cet exercice le flux $\Phi_{th}(x)$ n'est pas conservé le long du cylindre à cause des pertes thermiques sur les côtés.*

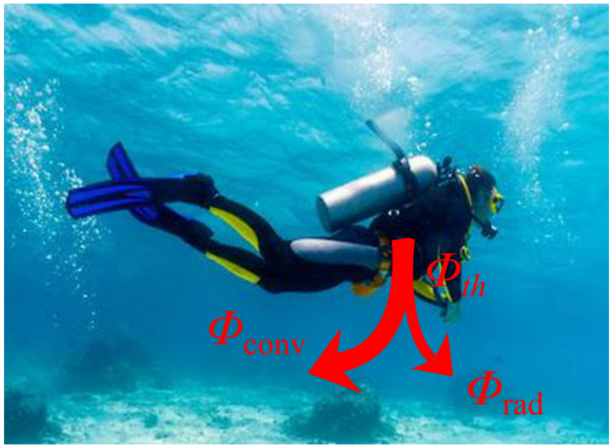
2. La question n'est pas très claire. Physiquement, j'aurai tendance à chercher une relation de proportionnalité entre la différence de température au début et à la fin de la barre $(T_A - T_0)$ et le flux thermique entrant dans la barre $\Phi_{th}(x = 0)$. On a :

$$\Phi_{th}(x = 0) = \frac{\lambda S}{a}(T_A - T_0) \Rightarrow T_A - T_0 = \frac{a}{\lambda S}\Phi_{th}(x = 0)$$

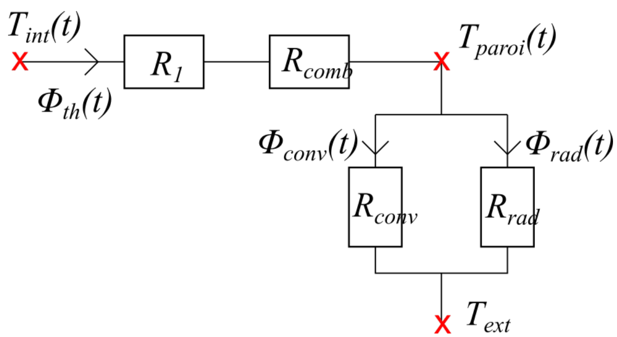
Cela revient à considérer que la barre a une résistance thermique $R_{th} = \frac{a}{\lambda S}$ On retrouve l'expression habituelle mais c'est a qui joue cette fois le rôle de longueur caractéristique au numérateur.

Evolution de la température du corps humain lors d'une plongée•

1. Notons Φ_{th} la puissance thermique dissipée par le plongeur. Cette puissance thermique traverse intégralement la combinaison de néoprène puis est dissipée :
   - par conducto-convection,
   - par rayonnement.



On a $\Phi_{th} = \Phi_{\text{conv}} + \Phi_{\text{rad}}$.
Le schéma électrique équivalent au plongeur est donc :



La résistance thermique totale vaut donc :

$$R_{tot} = R_1 + R_{comb} + \frac{R_{conv} R_{rad}}{R_{conv} + R_{rad}}$$

2. La loi d'Ohm donne simplement :

$$T_{int}(t) - T_{ext} = R_{tot} \Phi_{th}$$

3. La loi de Newton nous donne directement l'expression de la résistance de convection $R_{conv} = \frac{1}{hS}$.

4. (a) En appliquant le premier principe infinitésimal au {corps humain}, et en se plaçant dans le cadre de l'ARQS, on a :

$$\mathrm{d}U = \delta Q = P_{ATP}\mathrm{d}t - \Phi \mathrm{d}t \Rightarrow \boxed{mc\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{T(t)}{R_{tot}} = P_{ATP} + \frac{T_0}{R_{tot}}}$$

(b) On résout l'équation du premier ordre. On obtient :

$$T_{int}(t) = (T_{int}(t=0) - T_f)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + T_f$$

avec $\boxed{\tau = mcR_{tot}}$ et $\boxed{T_f = T_0 + R_{tot}P_{ATP}}$.

(c) On a :

$$t_h = \tau \times \ln \frac{T_{int}(t=0) - T_f}{T_{hypo} - T_f}$$

Pour les applications numériques, on pourra prendre $m = 60$ kg et $S = 1\text{m}^2$. Sachant que la capacité thermique massique de l'eau vaut $c_e = 4,18\text{J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (valeur à connaître à l'oral), une calorie correspond à 4,18 J. On en déduit $P_{ATP} = \frac{2400 \times 4,18}{24 \times 3600} = 0,12\text{W}$.

Métabolisme d'un mammifère

S'approprie et analyser Pour commencer un problème de ce genre, il faut essayer de faire un schéma et d'écrire sous forme mathématique toutes les informations données dans l'énoncé.

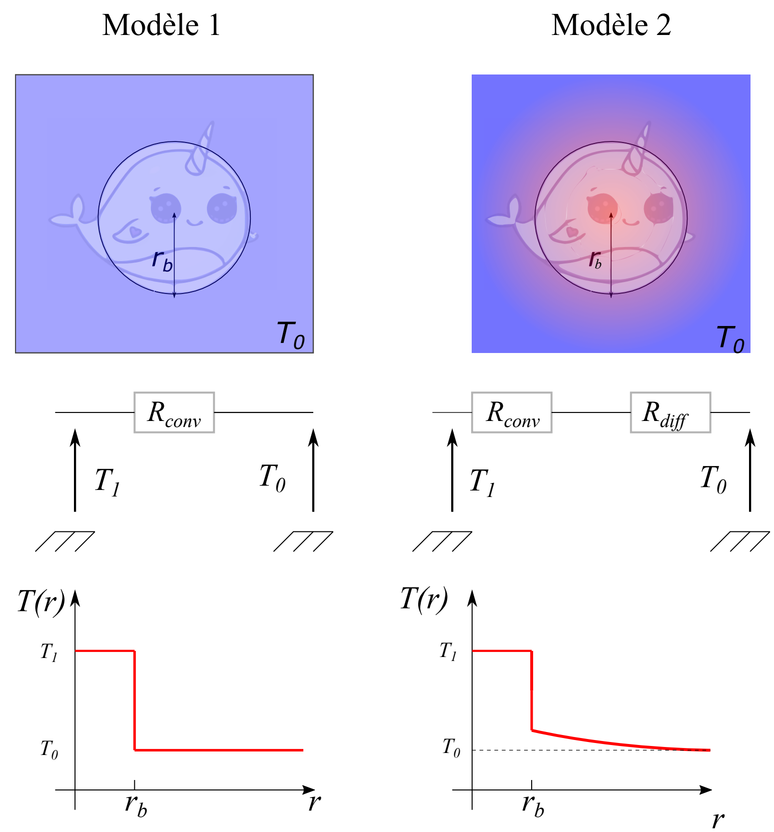


FIGURE 1. *Deux modèles pour décrire la baleine dans son élément.*

La façon la plus simple de modéliser un mammifère est de l'assimiler à une boule de rayon r_b. Le mammifère vivant sous l'eau, on se placera en régime permanent. On note p la puissance volumique du métabolisme du mammifère. Deux modélisations sont possibles pour les échanges de chaleur entre le mammifère et l'océan :

- **modélisation simple** : la température du mammifère est uniforme et égale à T_1. La température de l'eau est uniforme et égale à T_0. Les transferts de chaleur entre le mammifère et l'eau sont de type conducto-convectifs et se modélisent par une loi de Newton : $\Phi_{\text{th}} = h4\pi r_b^2(T_1 - T_0)$.

- **modélisation plus fine** : la température du mammifère est toujours prise uniforme et égale à T_1. La température de l'eau n'est pas uniforme. Loin du mammifère, elle vaut T_0. Plus on se rapproche du mammifère, plus elle augmente du fait de la diffusion de la chaleur dégagée par le mammifère dans l'eau. En régime permanent, la décroissance de la température dans l'eau est hyperbolique (*cf* exo précédent). Les transferts de chaleur entre le mammifère et l'eau sont donc de deux types : conducto-convectifs et diffusifs.

Réaliser On fait un bilan de chaleur sur le système $\{mammif\grave{e}re\}$ en régime permanent :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= 0 = \delta Q \\ 0 &= -\delta Q_s + \delta Q_p \\ 0 &= -\Phi_{\text{th}}\mathrm{d}t + pV_b\mathrm{d}t \Rightarrow \boxed{\Phi_{\text{th}} = p\frac{4}{3}\pi r_b^3}. \end{aligned}$$

Pour exprimer Φ_{th}, on utilisera la loi d'Ohm :

$$\phi_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_0}{R_{\text{th}}}$$

— **Modèle 1 :** La résistance thermique est égale à la résistance de convection (*cf* exo plongeur) : $R_{\text{th}} = \frac{1}{h4\pi r_b^2}$ où h est le coefficient de convection mammifère-eau. On en déduit :

$$p\frac{4}{3}\pi r_b^3 = (T_1 - T_0)h4\pi r_b^2 \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{3h(T_1 - T_0)}{r_b}}$$

En prenant un coefficient de Newton de 100 $\mathrm{W.K^{-1}.m^{-2}}$ et un rayon $r_b = 10\mathrm{m}$, on en déduit $\boxed{p = 300\mathrm{W.m^{-3}}}$.

— **Modèle 2 :** La résistance thermique est l'association série de la résistance de convection et de la résistance de diffusion entre l'eau au contact de la peau de la baleine et l'infini. En reprenant le résultat de l'exercice précédent, on a :

$$R_{diff} = \frac{\lambda}{4\pi r_b}$$

Le bilan de chaleur donne :

$$p\frac{4}{3}\pi r_b^3 = (T_1 - T_0)\left(h4\pi r_b^2 + \frac{4\pi r_b}{\lambda}\right) \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{3h(T_1 - T_0)}{r_b}\left(1 + \frac{1}{h\lambda r_b}\right)}$$

La conductivité thermique de l'eau valant 0,6 SI, le coefficient de Newton étant de l'ordre de 250 $\mathrm{W.K^{-1}m.^{-2}}$, et $r_b > 0{,}5\mathrm{m}$ le terme $\frac{1}{h\lambda r_b}$ est en fait négligeable devant 1 et on retrouve le résultat précédent.

Valider Pour une baleine bleue de 30m de long modélisée par une sphère de rayon $r_b = 10\mathrm{m}$, on trouve $p = 750\mathrm{W.m^{-3}}$. A titre de comparaison, la puissance du métabolisme d'un corps humain est de 1500 $\mathrm{W.m^{-3}}$! A volume égale, une baleine est donc bien plus économe en énergie qu'un être humain.Il est néanmoins difficile de comparer ces deux organismes car ils ne vivent pas dans le même milieu et n'ont pas les mêmes besoins (par exemple, le métabolisme humain doit constamment maintenir une température de 37°C au lieu de 30°C et la peau humaine est sans doute moins isolante que celle d'une baleine).

On peut par contre comparer les différents mammifères marins entre eux. L'expression trouvée pour p montre que p est d'autant pluspetit que r_b est grand. Un mammifère de grande taille devra donc dégager moins de puissance par unité de volume pour se réchauffer qu'un mammifère de plus petite taille. Ainsi, le plus petit mammifère marin au monde, le marsouin du pacifique, de taille 1m50 ($r_b \sim 0{,}5\mathrm{m}$), devra dégager une puissance volumique $p = 6000\mathrm{W.m^{-3}}$ pour survivre !C'est pourquoi il n'existe pas de mammifères marins de la taille d'une souris.

FIGURE 2. *Le marsouin du pacifique. Il est très mignon ! Mais il est en danger critique d'extinction (plus que 19 individus à l'échelle mondiale)...*