DEVOIR LIBRE n°4
CUISSON D'UN OEUF

PSI 2022-2023

Pour le 16 Décembre

Ce problème a pour objet l'étude d'un cuiseur à oeufs.

Figure 4 Vue de profil, vue de dessus, vue de dessus sans la cloche (laissant voir la grille)

Cet appareil cuit des oeufs (au nombre de 1 à 7) grâce à la vapeur d'eau qui se forme par ébullition de l'eau placée dans le fond du cuiseur.

Les oeufs à cuire selon différents degrés de cuisson (coque, mollet, dur) sont placés sur une grille percée de 7 trous circulaires et de 6 trous périphériques permettant la circulation de la vapeur d'eau dans l'enceinte de cuisson.

Des orifices sont percés au sommet de la cloche métallique pour permettre à la vapeur de s'échapper. La puissance électrique consommée par l'appareil est : $\mathcal{P} = 350$ W. On considèrera que cette puissance est intégralement consommée par la résistance chaufante.

La quantité d'eau placée dans le cuiseur est mesurée à l'aide d'un gobelet gradué selon le nombre d'oeufs à cuire et le type de cuisson désirée (voir igure 6). Le fond est bombé à cause de la présence d'une pique sous la base du gobelet permettant le perçage du sommet de l'oeuf lors de la cuisson ain d'éviter la rupture de la coquille.

Problématique

On voit sur les graduations du gobelet que la quantité d'eau nécessaire à la cuisson est d'autant plus grande que le nombre d'oeufs à cuire est faible, ce qui est à priori étonnant. Les sous-parties qui suivent vont permettre d'analyser ce phénomène.

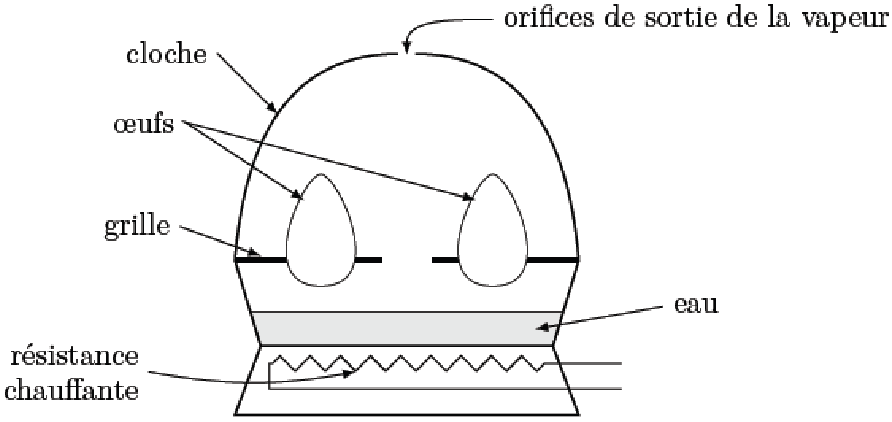

Figure 5 Schéma général du cuiseur

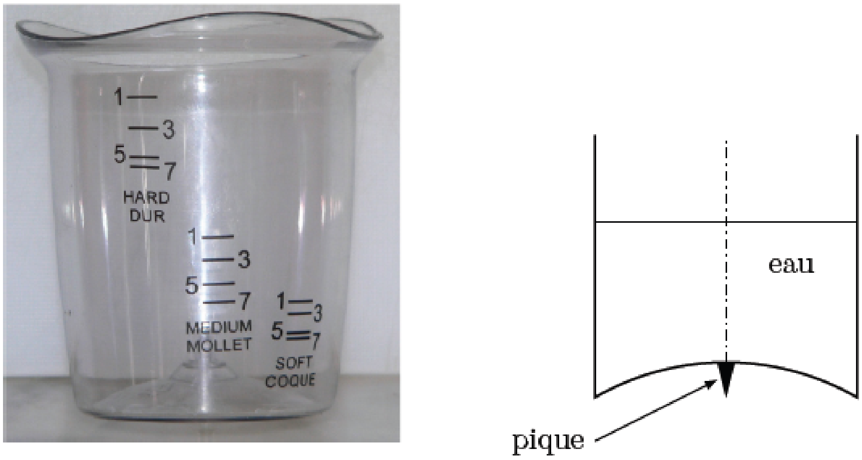

Figure 6 Photo et schéma du gobelet

Fonctionnement du cuiseur

Le volume d'eau nécessaire à la cuisson d'un seul œuf dur est de 120 mL. Les œufs à la température initiale $T_0 = 20°\mathrm{C}$ sont placés dans le cuiseur et la masse d'eau m_0 contenue dans le gobelet (à la même température initiale T_0) est versée sous les œufs. Cette eau est portée à ébullition sous $p = 1$ bar, puis évaporée. Le cuiseur s'arrête quand toute l'eau s'est évaporée.

Notons c la capacité thermique massique de l'eau liquide, T_{eb} sa température d'ébullition dans les conditions de l'expérience, $h \approx 1200\mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$ le coefficient de transfert conducto-convecd(eau↔œuf) et $m(t)$ la masse d'eau contenue dans le cuiseur à l'instant t.

Soient Δt_1 la durée de chauffage de l'eau de T_0 à T_{eb} et Δt_2 la durée de la cuisson des œufs, qui correspond à l'évaporation totale de l'eau. Pendant cette deuxième phase, on supposera que la vapeur d'eau est à la température T_{eb} sous la pression $p = 1\mathrm{bar}$.

I Chauffage de l'eau

1) Soit m_c la valeur en eau du cuiseur (on rappelle que la valeur en eau d'un objet est la masse d'eau ayant même capacité thermique que cet objet). En supposant la transformation adiabatique pendant le chauffage, exprimer Δt_1 en fonction des données.

2) On place dans le cuiseur une masse d'eau $m_0 = 125\mathrm{g}$. On mesure alors une durée de chauffage $\Delta t_0 = 150\mathrm{s}$ avant de parvenir à l'ébullition. En déduire la valeur en eau du cuiseur.

II Détermination de la durée de cuisson Δt_2

II.1 Mécanisme de la cuisson des œufs

Un œuf est composé de trois parties :

- une coquille très mince ;
- le blanc d'œuf constituant les deux tiers de l'œuf. C'est un liquide composé à environ 90% d'eau et 10% de protéines, sels minéraux et vitamines ;
- le jaune d'œuf est composé à moitié d'eau, de 15% de protéines et de 30% de lipides.

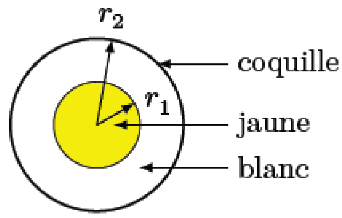

Figure 7 Structure interne d'un œuf

Lors de la cuisson (type œuf dur) les protéines se déroulent partiellement et se lient pour former un réseau qui piège l'eau : c'est un gel. Les œufs caoutchouteux sont ceux qui ont perdu trop d'eau ; c'est aussi la sur-cuisson du jaune qui le fait devenir sableux. Quand un œuf est cuit à 100°C, la masse diminue progressivement à mesure que l'eau est éliminée du gel formé.

Quand un œuf est cuit à une température peu supérieure à la température de coagulation de ses protéines, il coagule en conservant son eau, gage de moelleux. Le jaune d'œuf commence à épaissir à 65°C. Il coagule totalement à une température de 85°C.

1) Justifier l'existence de la pique sous le fond du gobelet.

II.2 Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

Pour déterminer le temps de cuisson, il est nécessaire de résoudre l'équation de la chaleur en régime dépendant du temps. On modélise un œuf comme un ensemble de deux sphères concentriques de rayons r_1 et r_2 limitant le jaune et le blanc (figure 7).

Afin de simplifier l'étude, on va négliger l'influence de la coquille et considérer l'intérieur de l'œuf comme homogène et ayant les propriétés thermodynamiques de l'eau : masse volumique μ, capacité thermique massique c et conductivité thermique λ.

1) Établir l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques, en faisant un bilan énergétique sur une couche sphérique de rayon r et d'épaisseur $\mathrm{d}r$.

2) On introduit les variables réduites : $\rho = r/r_2$ et $\tau = t/\theta$. Exprimer θ en fonction de μ, c, r_2 et λ pour que l'équation de la chaleur s'écrive :

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial T(\rho,\tau)}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial T(\rho,\tau)}{\partial \tau} \tag{1}$$

Commenter la dépendance de θ par rapport à r_2.

II.3 Résolution de l'équation de la chaleur

1) Afin de résoudre cette équation *en régime dépendant du temps*, on pose dans un premier temps

$$T(\rho,\tau) = T_{\mathrm{eb}} + f(\rho)g(\tau)$$

En utilisant l'équation de la chaleur, montrer que la composante temporelle $g(\tau)$ vérifie l'équation

$$\frac{1}{g(\tau)}\frac{\mathrm{d}g(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = -A^2$$

où A est une constante réelle positive, inconnue à ce stade de la résolution.

Donner l'expression de $g(\tau)$ à une constante multiplicative près et justifier le signe $-$ figurant devant A^2.

2) Pour trouver la composante spatiale de $T(\rho,\tau)$, on pose $f(\rho) = \dfrac{F(\rho)}{\rho}$. Montrer alors que $F(\rho)$ est solution de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{F}(\rho)}{\mathrm{d}^2\rho} + A^2F(\rho) = 0$$

En déduire l'expression de $f(\rho)$.

3) Montrer alors que la solution générale de l'équation (1) peut s'écrire sous la forme

$$T(\rho,\tau) = T_{\mathrm{eb}} + \sum_i \frac{\beta_i \sin(A_i\rho)}{\rho}\exp(-A_i^2\tau) \tag{2}$$

Quelles sont les différentes conditions qui permettent théoriquement de calculer les coefficients β_i et A_i ?

4) Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier

Dans le cadre de l'approximation de Fourier, on ne conserve dans l'expression (2) que le terme associé à la constante de temps la plus longue, donc celui correspondant au coefficient A_i le plus petit (qui sera noté A dans la suite), car les autres termes sont rapidement amortis au cours du temps :

$$T(\rho,\tau) \approx T_{\mathrm{eb}} + \frac{\beta\sin(A\rho)}{\rho}\exp(-A^2\tau)$$

a) On suppose que les échanges thermiques au niveau de la coquille sont donnés par la loi de Newton $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}} = h(T(\rho=1,\tau)-T_{\mathrm{eb}})\vec{u}_r$. En écrivant deux expressions permettant d'exprimer le flux thermique entrant dans l'œuf, montrer que A est solution de l'équation

$$\frac{A}{1-r_2h/\lambda} = \tan A$$

b) Pour un œuf moyen, on a $r_2 = 2,5\mathrm{cm}$. Montrer que dans ces conditions, on peut prendre $A \approx \pi$ comme première solution de l'équation précédente dans $\mathbb{R}^{+*}$. Évaluer l'erreur commise.

c) Exprimer alors $T(\rho,\tau)$ avec la valeur de A précédente. Quelle conséquence peut-on en tirer sur la température à la surface de l'œuf ? Montrer que cela revient à considérer une des grandeurs caractéristiques du problème comme infinie.

d) Calculer β en exprimant la température au centre de l'œuf à $t=0$.

II.4 Calcul de la durée de cuisson Δt_2 pour un œuf dur

1) Exprimer en fonction de θ et des autres données du problème la durée de cuisson Δt_2 à l'état dur d'un œuf de rayon r_2, pour lequel la température au centre doit atteindre $T_c = 80°\mathrm{C}$.

2) Calculer Δt_2 pour un œuf de rayon $r_2 = 2,5\mathrm{cm}$. Commenter le résultat obtenu.

III Détermination de la masse d'eau à placer dans le cuiseur

1) Détermination approchée de l'énergie de cuisson d'un œuf dur $\mathcal{E}_d$

a) En faisant un bilan énergétique très simple entre l'état final et l'état initial, donner une borne inférieure $\mathcal{E}_{d\,\mathrm{min}}$ de l'énergie de cuisson $\mathcal{E}_d$ d'un œuf dur. Faire l'application numérique.

b) De la même façon, donner une borne supérieure $\mathcal{E}_{d\,\max}$ de l'énergie $\mathcal{E}_d$. Faire l'application numérique.

c) Dans la suite, on adoptera comme valeur de l'énergie $\mathcal{E}_d$ la moyenne arithmétique de $\mathcal{E}_{d\,\min}$ et $\mathcal{E}_{d\,\max}$. Calculer numériquement cette valeur.

2) Pendant la phase de cuisson, on peut considérer l'eau contenue dans le cuiseur comme un système ouvert en écoulement permanent, admettant en entrée de l'eau liquide à la température T_{eb} et en sortie de la vapeur d'eau à T_{eb} (noter que, dans cette modélisation, les œufs font partie de l'extérieur du système).

Soit $\mathcal{P}$ la puissance thermique fournie par la résistance chauffante, $\mathcal{P}_f$ la puissance associée aux pertes thermiques dans les différentes parties du cuiseur (socle, cloche...).

On note :

- D_m le débit massique de vapeur en sortie ;
- n le nombre d'œufs dans le cuiseur ;
- ℓ_v la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau liquide à100°C, $\ell_v = 2,26.10^6 \text{J.kg}^{-1}$;
- $\mathcal{E}(t)$ l'énergie cédée à un œuf entre le début de sa cuisson et l'instant t ;
- $\mathcal{E}_X$ l'énergie nécessaire à la cuisson d'un œuf dans l'état $X \equiv \begin{cases} d: & \textit{dur} \\ m: & \textit{mollet} \\ c: & \textit{coque} \end{cases}$.

En appliquant le premier principe au système ouvert en régime permanent pendant la durée dt, établir la relation entre D_m, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_f$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$ et le nombre d'œufs n.

3) On introduit dans le cuiseur une masse m_0 d'eau liquide, qui va donc être vaporisée pendant la phase de cuisson de durée Δt_2. Montrer que

$$m_0 = \frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f)\Delta t_2 - n\mathcal{E}_X}{\ell_v}$$

Justifier alors les graduations du gobelet.

4) Exprimer la puissance thermique minimale que doit fournir la résistance électrique pour pouvoir cuire 7 œufs durs. Faire l'application numérique en considérant $\mathcal{P}_f \approx 0$ et en prenant $\mathcal{E}_d = 19\text{kJ}$ pour un œuf de 2,5 cm de rayon dont le temps de cuisson est d'environ 10 minutes. Comparer à la puissance du cuiseur et commenter.

5) On donne ci-dessous la représentation graphique de la masse d'eau m_0 contenue dans le gobelet en fonction du nombre d'œufs pour les trois degrés de cuisson (d, m, c). Analyser ces courbes à la lumière des résultats précédents. En particulier :

- déterminer la taille des œufs (c'est-à-dire leur rayon) qui ont servi à étalonner le gobelet ;
- le temps de cuisson d'un œuf dur vous semble-t-il conforme aux résultats obtenus plus haut ?

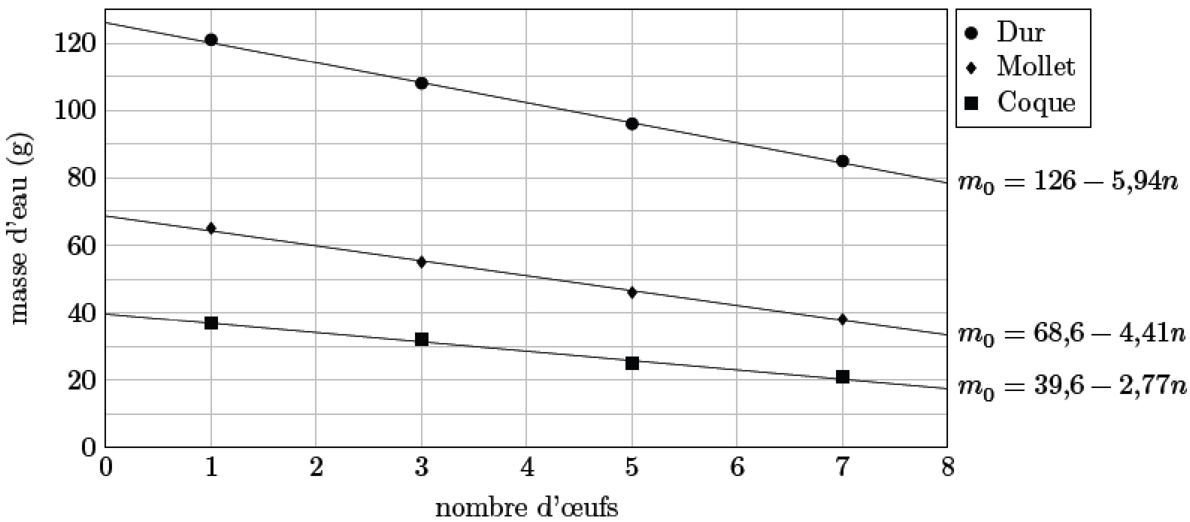

Figure 8 Masse d'eau à introduire dans le cuiseur en fonction du nombre d'œufs, pour les différents choix de cuisson

Données sur l'eau

masse volumique : $1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

conductivité thermique : $0{,}6\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$

produit ionique : $K_e = 10^{-14}$

capacité thermique massique : $4180\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$

chaleur latente massique de vaporisation : $2{,}26 \times 10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$

température d'ébullition sous 1 bar : 100 °C