

Correction TD n°14

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

- ★ Exercice niveau CCP
- Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
- ◇ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Diffusion à travers une membrane

1. D'après l'énoncé, la concentration le long d'un pore est une fonction affine de x . On est donc en régime quasi-stationnaire où on peut donc écrire :

$$c(x, t) = A(t)x + B(t),$$

avec comme conditions aux limites : $c(x = 0, t) = c_1(t)$ et $c(x = e, t) = c_2(t)$.
On en déduit donc :

$$c(x, t) = -\frac{\Delta c(t)}{e}x + c_1(t)$$

Le vecteur densité de flux molaire **dans un pore** vaut donc :

$$\vec{j}_c^{\text{pore}} = -D \vec{\text{grad}} c = -D \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) \vec{u}_x = D \frac{\Delta c(t)}{e} \vec{u}_x$$

Le flux molaire à travers un pore vaut donc :

$$\Phi_n^{\text{pore}} = D \frac{\Delta c(t)}{e} \pi r^2$$

Etant donné qu'il n'y a N pores par unité de surface et que la surface de la membrane vaut S , le flux molaire à travers toute la membrane vaut :

$$\Phi_n = NS \Phi_n^{\text{pore}}$$

La densité de flux molaire à travers toute la membrane vaudra :

$$j_c = \frac{\Phi_n}{S} = N \Phi_n^{\text{pore}} = ND \pi r^2 \frac{\Delta c(t)}{e}$$

On en déduit $K = \frac{ND \pi r^2}{e}$.

2.

$$r = \sqrt{\frac{Ke}{N\pi D}}$$

3. On s'intéresse à l'évolution des concentrations des deux réservoirs. On va donc effectuer un bilan macroscopique sur ces deux réservoirs. Notons $n_1(t)$ (resp. $n_2(t)$) le nombre de moles contenus dans le réservoir 1 (resp. réservoir 2) à la date t . Etant donné que le flux de particules se fait de 1 vers 2, on a :

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt}(t) = -\Phi_n = -KS \Delta c(t) \\ \frac{dn_2}{dt}(t) = +\Phi_n = KS \Delta c(t) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \frac{dc_1}{dt}(t) = -\frac{KS}{V_1} \Delta c(t) \\ \frac{dc_2}{dt}(t) = \frac{KS}{V_2} \Delta c(t) \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équations, on trouve :

$$\frac{d\Delta c}{dt}(t) = -\alpha \Delta c(t)$$

4. C'est une équation différentielle du premier ordre! Elle s'intègre en :

$$\Delta c(t) = \Delta c(0) e^{-\alpha t}$$

La différence de concentration ne vaut plus qu'un dixième de la différence initiale lorsque :

$$\frac{\Delta c(0)}{10} = \Delta c(0)e^{-\alpha t} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\ln 10}{\alpha}}$$

Réacteur nucléaire

1. L'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) + \frac{n(x,t)}{\tau}$$

τ représente un temps caractéristique de production de neutrons par réaction nucléaire. En absence de diffusion, on a $j_N \sim \frac{\partial n}{\partial x} = 0$. Donc n ne dépend donc pas de x . L'équation précédente se simplifie en :

$$\frac{dn}{dt}(t) = \frac{n(t)}{\tau}$$

dont la solution s'écrit : $n(t) = n_0 e^{\frac{t}{\tau}}$. On voit que $n(t)$ diverge avec le temps (les neutrons s'accumulent dans la barre : cas de l'explosion nucléaire).

2. En régime permanent, l'équation de diffusion se simplifie en :

$$D \frac{d^2 n}{dx^2}(x) + \frac{n(x)}{\tau} = 0$$

On reconnaît une équation d'oscillateur harmonique. La solution s'écrit sous la forme :

$$n(x) = A \cos(k_0 x) + B \sin(k_0 x)$$

avec $k_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau D}}$. Les zones de piégeage imposent les conditions aux limites : $n(x = a/2) = n(x = -a/2) = 0$. On en déduit :

$$\begin{cases} A \cos(k_0 \frac{a}{2}) + B \sin(k_0 \frac{a}{2}) = 0 \\ A \cos(k_0 \frac{a}{2}) - B \sin(k_0 \frac{a}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cos(k_0 \frac{a}{2}) = 0 \\ B \sin(k_0 \frac{a}{2}) = 0 \end{cases}$$

Etant donné que $\cos(x)$ et $\sin(x)$ ne peuvent s'annuler pour un même x , soit $A = B = 0$, soit $A = 0$ et $\sin(k_0 \frac{a}{2}) = 0$ ou bien $B = 0$ et $\cos(k_0 \frac{a}{2}) = 0$. La première solution correspond à une absence de réaction nucléaire ($n(x) = 0 \forall x$). La deuxième solution ne peut convenir car on aurait alors

$n(x = 0) = 0$ ce qui n'est pas possible d'après l'énoncé. La densité de particules est donc de la forme.

$$\boxed{n(x) = A \cos(k_0 x)}$$

et on a par ailleurs :

$$k_0 \frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\tau = \frac{a^2}{D\pi^2}} \quad (1)$$

Si τ est inférieur à la relation requise, la seule solution possible est $A = B = 0$ (pas de réaction).

Dans le cas où la condition (1) est vérifiée, le nombre total de neutrons dans la barre est lié à $n(x)$ par :

$$N_0 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} n(x) S dx = 2 \frac{S B a}{\pi} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\pi N_0}{2 S a}}$$

La densité maximale de neutrons se situe au milieu de la barre et vaut $n_{\max} = \frac{\pi N_0}{2 S a}$.

3. Le flux de neutrons en $x = a/2$ vaut :

$$\Phi_N(x = \frac{a}{2}) = S j_N(x = \frac{a}{2}) = -SD \frac{dn}{dx}(x = \frac{a}{2}) = \frac{SD\pi^2}{2a^2} N_0$$

Par symétrie, le flux en $-a/2$ aura la même valeur (mais il aura un sens opposé). En valeur absolue, la somme des flux sortants vaut $\Phi_s = \frac{SD\pi^2}{a^2} N_0 = \frac{N_0}{\tau}$. La quantité de neutrons sortants de la barre par unité de temps est égal à la quantité de neutrons produits dans la barre par unité de temps. C'est tout à fait normal en régime permanent.

4. L'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) - \frac{n(x,t)}{\tau'}$$

En séparant les variables, on en déduit :

$$\frac{\dot{g}(t)}{g(t)} = D \frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{1}{\tau'}$$

Le terme de gauche est une fonction uniquement du temps et le terme de droite est une fonction uniquement de x . L'égalité précédente pourra

être vérifiée $\forall t$ et $\forall x$ si et seulement si ces fonctions sont égales à une même constante. On aura donc :

$$\frac{\dot{g}(t)}{g(t)} = D \frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{1}{\tau'} = \text{cste} = \alpha$$

- $g(t)$ est solution de l'équation :

$$\dot{g}(t) - \alpha g(t) = 0$$

Donc $g(t) = g_0 e^{\alpha t}$. Attention, le signe de α n'est pas connu. On ne peut donc pas encore conclure sur la stabilité du système.

- $f(x)$ est solution de l'équation :

$$f''(x) - \frac{1}{D} \left(\alpha + \frac{1}{\tau'} \right) f(x) = 0$$

La fonction $f(x)$ devant respecter les mêmes conditions aux limites que précédemment, on aura nécessairement $\alpha + \frac{1}{\tau'} < 0$. Dans ce cas

$f(x) = A' \cos(k'_0 x)$ avec $k'_0 = \sqrt{\frac{1}{D} \left| \alpha + \frac{1}{\tau'} \right|}$. Par ailleurs, on a toujours la condition : $k'_0 = \frac{\pi}{a}$ d'où :

$$\alpha = -\frac{\pi^2 D}{a^2} - \frac{1}{\tau'}$$

Discutons de ce qui se passe en fonction de la valeur de τ' :

- Si $\tau' > 0$, alors les neutrons sont absorbés dans la barre, $\alpha < 0$ et $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$: la réaction nucléaire s'arrête rapidement.
- Si $\tau' < 0$:
 - ★ soit $-\frac{1}{\tau'} < \frac{\pi^2 D}{a^2} \Rightarrow \alpha < 0$ et $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$. Les neutrons produits ont le temps d'être diffusés dans la barre et la réaction nucléaire s'arrête rapidement.
 - ★ soit $-\frac{1}{\tau'} > \frac{\pi^2 D}{a^2} \Rightarrow \alpha > 0$ et $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$. La réaction s'emballe et il y a explosion nucléaire.

Taille critique d'une bactérie

On modélise la bactérie par une sphère de rayon R . On note $c(r)$ la concentration en dioxygène dans l'eau, $\vec{j}_n = -D \frac{dc}{dr}(r) \vec{u}_r$ le vecteur densité de flux molaire et Φ_n le flux molaire de dioxygène dans l'eau. Comme la concentration en dioxygène diminue lorsqu'on se rapproche de la bactérie, le vecteur \vec{j}_n est dirigé suivant $-\vec{u}_r$.

Un bilan du nombre de moles échangées par {la bactérie} en régime permanent donne :

$$dn = \delta n_e - \delta n_s + \delta n_p = \Phi_n dt - 0 - \rho \frac{4}{3} \pi R^3 A dt \stackrel{R.P}{=} 0$$

On en déduit la relation entre le flux molaire rentrant et le taux de consommation molaire¹ de dioxygène : $\Phi_n = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 A$.

Par ailleurs, en utilisant la loi de Fick, on peut relier la concentration en dioxygène et ce flux :

$$\Phi_n = \oiint \vec{j}_n(r) \cdot \vec{dS} = -4\pi r^2 j_n(r) = 4D\pi r^2 \frac{dc}{dr}(r)$$

Attention, si le flux rentrant dans la bactérie est compté positivement, le vecteur surface \vec{dS} de l'intégrale doit être orienté suivant $-\vec{u}_r$! En primitivant, on en déduit :

$$\Rightarrow c(r) = -\frac{\Phi_n}{4D\pi r} + c_0$$

où c_0 désigne la concentration en dioxygène dans l'eau à l'équilibre loin de la bactérie. Ce dernier résultat indique que la concentration en dioxygène dissous diminue lorsqu'on s'approche de la bactérie.

La bactérie restera en vie si la concentration en dioxygène à sa surface n'est pas null soit :

$$-\frac{\Phi_c}{4D\pi R} + c_0 > 0 \Leftrightarrow c_0 > \frac{\rho R^2 A}{3D} \Leftrightarrow R < \sqrt{\frac{3Dc_0}{\rho A}}$$

1. et non pas massique comme marqué dans le sujet.