

TD n°15 Electrostatique

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

- ★ Exercice niveau CCP
- Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
- ◇ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Equations locales

1.1 Calcul d'un potentiel et d'une distribution volumique de charges★

Dans l'espace muni d'un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, un champ électrique a pour expression :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 \frac{x}{a} \vec{u}_x & \text{pour } -a \leq x \leq a \\ E_0 \vec{u}_x & \text{sinon} \end{cases}$$

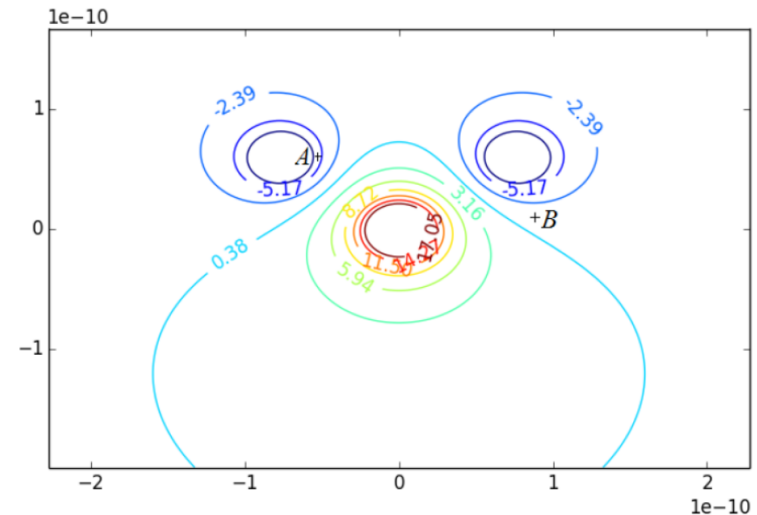
- Déterminer l'expression du potentiel $V(x)$ en tout point. On pose $V(0) = 0$.
- Calculer la densité volumique de charge $\rho(x)$ correspondant à ce champ électrique.

1.2 Equations de Maxwell★

On propose deux expressions pour des champs : $\vec{E}_1 = Kx\vec{u}_x$ et $\vec{E}_2 = Kx\vec{u}_y$, avec K une constante.

- Représenter le champ $\vec{E}$ en différents points du plan (Oxy) .
- Calculer la divergence et le rotationnel de ces deux champs.
- En déduire qu'un seul de ces champs peut être un champ électrostatique et déterminer la densité volumique de charge correspondante.

1.3 Équipotentielle de la molécule d'eau★



Toutes les grandeurs sont indiquées en unités SI. Les valeurs des équipotentielles sont régulièrement espacées.

- Tracer les lignes de champ électrique.
- Placer les atomes composant la molécule.
- Évaluer le champ électrique aux points A et B.

1.4 Membrane cellulaire★

Une membrane cellulaire (d'un être vivant) est assimilée au plan infini (Oyz) ; l'axe (Ox) est orienté vers l'extérieur de la cellule. On schématise le potentiel par la

fonction suivante :

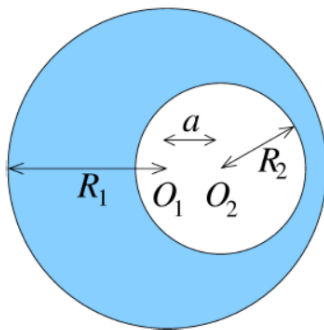
$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } x \leq 0, \\ -V_0 \exp\left(-\frac{x}{a}\right) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

où $V_0 > 0$ est une constante et a une distance.

1. Calculer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point.
2. Déterminer la densité volumique de charges ρ en tout point grâce à l'équation de Poisson ;
3. Déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface d'équation $x = 0$ en admettant que la relation de discontinuité du champ vue en cours reste valide.
4. Déterminer la charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de base S , s'étendant le long de l'axe (Ox) (de 0 à $+\infty$).

2. Variation du champ gravitationnel à la surface d'une planète★

On considère une planète sphérique de rayon $R_1 = 1000$ km constituée principalement d'un matériau de masse volumique $\rho_1 = 8000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. À l'intérieur de cette sphère se trouve une boule creuse de rayon R_2 , dont le centre est décalé d'une distance a par rapport à celui de la grande sphère.



1. Déterminer le champ gravitationnel en tout point de la sphère de centre O_2 .

3. Potentiel de Yukawa•

On cherche à déterminer la distribution de charges qui crée en tout point M de l'espace un potentiel électrostatique de la forme :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a_0}},$$

q étant la charge élémentaire ($q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) et a_0 une distance ($a_0 = 10^{-10} \text{ m}$).

1. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M (différent de l'origine O).
2. Etudier les cas limites $r \ll a$ et $r \gg a$.
3. Calculer le flux du champ à travers la surface délimitant une boule de centre O et de rayon r , et en déduire la charge $Q(r)$ contenue dans cette boule. Etudier les cas limites $r \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow 0$. Expliquer en quoi ce potentiel peut modéliser la distribution de charges d'un atome d'hydrogène.
4. Déterminer la densité de charge volumique $\rho(r)$ répartie dans l'espace autour de O .
5. On définit la densité de probabilité de présence $P(r)$ de l'électron dans le volume élémentaire dV par $dq(r) = -eP(r)dV$ où $dq(r)$ est la charge contenue dans le volume dV . Exprimer $P(r)$ puis la probabilité $p(r)$ de trouver l'électron à une distance comprise entre r et $r + dr$ du noyau. Etudier la fonction $p(r)$. Comment peut-on interpréter a ? Donner l'ordre de grandeur de a .

4. Champ créé par un disque au voisinage de son axe•

On considère un disque de rayon R portant une distribution surfacique de charge uniforme σ .

1. Déterminer dans quelle direction pointe le champ électrique en tout point de l'axe du disque.
2. On s'intéresse maintenant au champ électrostatique au voisinage de l'axe. On s'intéresse donc au champ en un point M repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .
 - (a) Montrer que le champ $\vec{E}$ n'a pas de composante suivant $\vec{u}_\theta$ en M .
 - (b) Montrer que la norme de $\vec{E}$ ne dépend que de r et de z .
 - (c) Que peut-on dire du flux de $\vec{E}$ à travers un petit cylindre d'axe Oz dont les bases sont des disques de rayon r petit et de cotes z et $z + dz$ (figure 1)? En déduire l'équation différentielle :

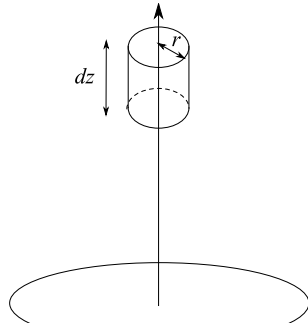


FIGURE 1. Disque chargé

$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dE_z(0, z)}{dz}$$

Sachant que le champ $\vec{E}$ sur l'axe du disque vaut :

$$\vec{E}_{\text{axe}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

en déduire l'expression de $E_r(r, z)$.

- (d) Calculer de même la circulation du champ électrostatique le long du petit rectangle de sommet $M(r, z)$, $N(r, z + dz)$, $P(r + dr, z + dz)$ et $Q(r + dr, z)$ en supposant r petit. En déduire que :

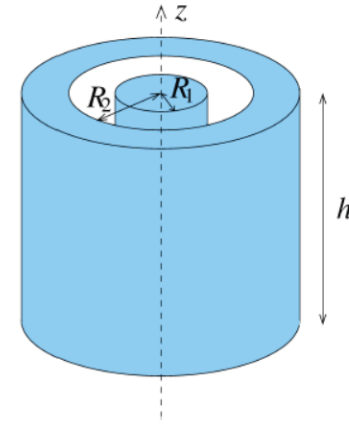
$$\frac{\partial E_z}{\partial r}(r, z) = \frac{\partial E_r}{\partial z}(r, z)$$

puis :

$$E_z(r, z) = E_z(0, z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 E_z}{dz^2}(0, z)$$

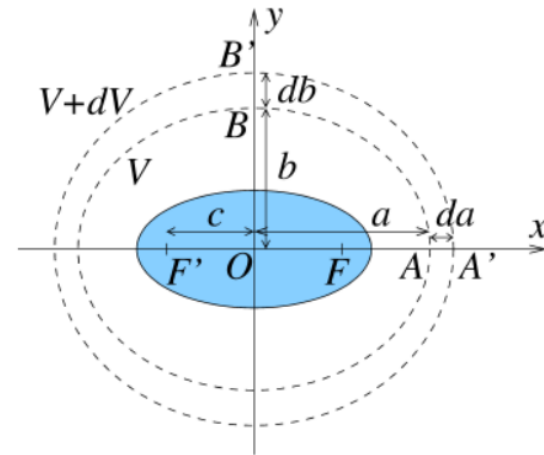
Etablir l'expression de $E_z(r, z)$.

5.1 Condensateur cylindrique★



Déterminer la capacité d'un condensateur dont les armatures sont deux cylindres concentriques de hauteur h et de rayons respectifs $R_1 \ll h$ et $R_2 \ll h$ portant les charges respectives Q et $-Q$. Analyser le cas où $R_2 - R_1 = e$ devient très faible devant R_1 .

5.2 Pouvoir des pointes•



On considère un conducteur en équilibre ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution de centre O , de demi-grandaxe $a = OA$, de demi-petit-axe $b = OB$, de foyers F et F' et d'excentricité e . On précise que l'excentricité d'une ellipse peut

5. Condensateurs

être définie par $e = \frac{c}{a}$ où $c = OF = OF'$. On a donc $e \in [0, 1[$: pour $e = 0$ on obtient un cercle, et plus e se rapproche de 1, plus l'ellipse est aplatie. On a également la relation $c^2 = a^2 - b^2$.

On admet que les équipotentiels dans l'air sont les ellipsoïdes de révolutions de même foyers F et F' . L'équipotentielle V d'excentricité e et l'équipotentielle $V + dV$ d'excentricité $e + de$ coupent l'axe (Oy) en deux points voisins B et B' et l'axe (Ox) en deux points voisins A et A'.

1. Exprimer le rapport $\frac{da}{db}$ en fonction de e .
2. En déduire le rapport $\frac{E_A}{E_B}$ des champs électriques au voisinage de A et B. Où le champ est-il le plus grand ?
3. Que peut-il se passer dans l'air si le conducteur est chargé et si e est proche de 1 ?