

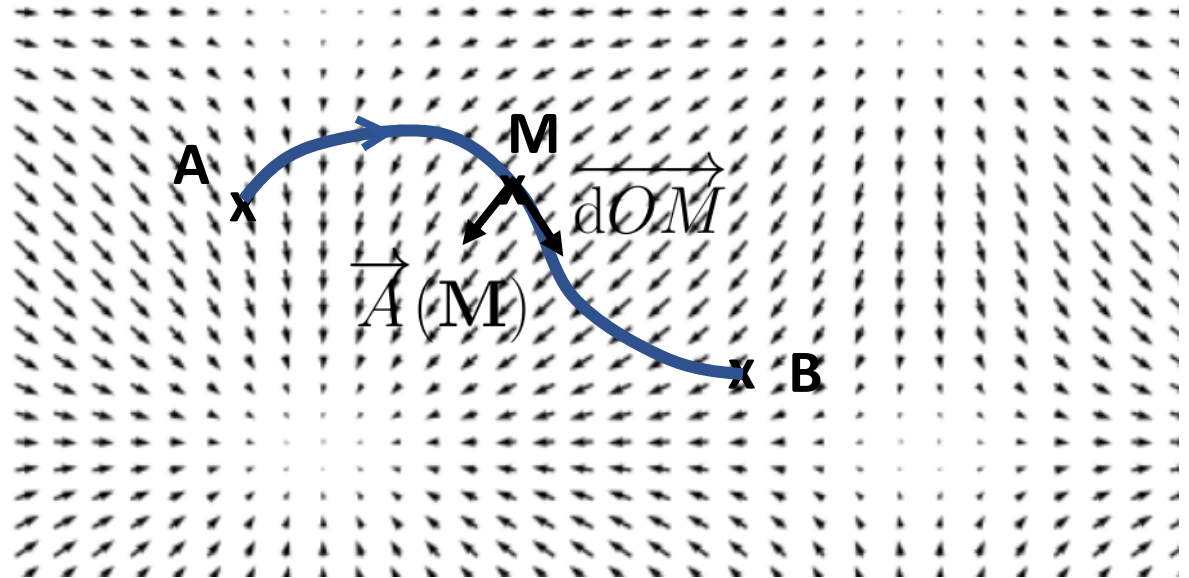
Circulation et opérateur
rotationnel

Circulation d'un champ vectoriel

Soient 2 points A et B de l'espace, on appelle **circulation** du champ $\vec{A}(M)$ le long d'un chemin Γ , la quantité:

$$\mathcal{C}(\vec{A}) = \int_{\Gamma} \vec{A}(M) \cdot d\vec{OM}$$

Comme le flux, la circulation est une grandeur **scalaire**.

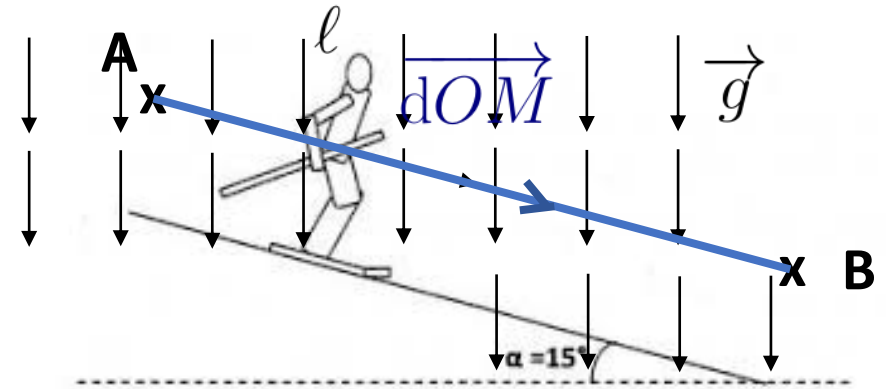


$\mathcal{C}(\vec{A})$ mesure la quantité de $\vec{A}(M)$ qui « circule » le long du chemin Γ .

- Vous connaissez déjà une circulation:

Le travail que fournit une force $\vec{F}$ à un système le long d'un chemin liant deux points A et B est la circulation de $\vec{F}$ sur ce chemin:

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

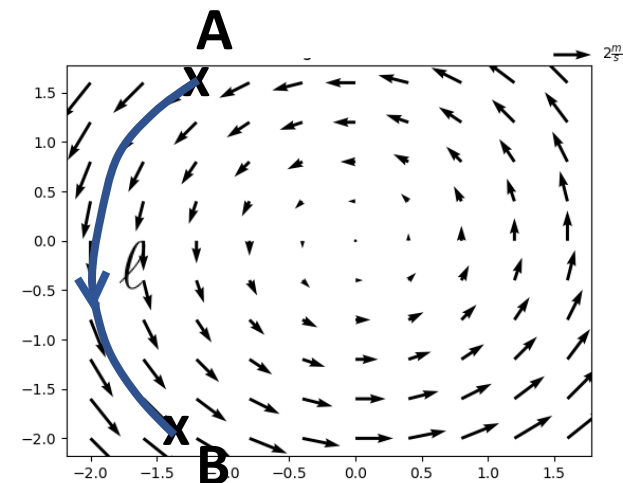
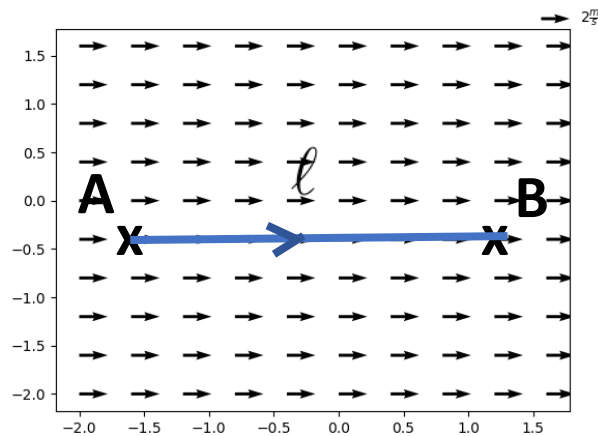


Ce travail est d'autant plus grand que:

- Le chemin est long
- La force et le chemin sont orientés dans la même direction

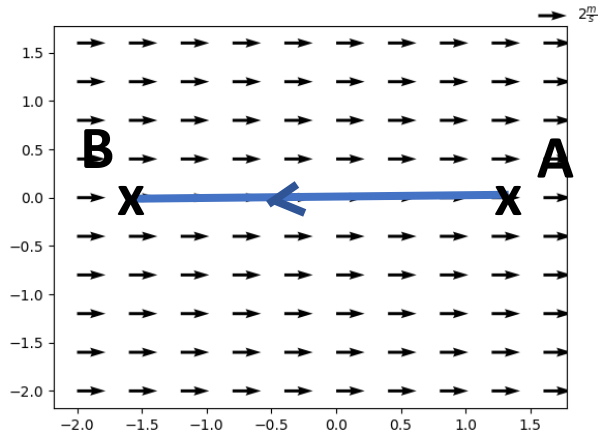
- Dans le cas général, la circulation d'un vecteur est difficile à calculer à la main. Heureusement, comme pour les calculs de flux, on ne rencontrera que des cas simples.

1) Champ uniforme le long du chemin et tangent au chemin entre A et B:



$$\int_A^B \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{dOM} =$$

2) Champ uniforme et tangent au chemin entre A et B mais circulation en sens inverse:

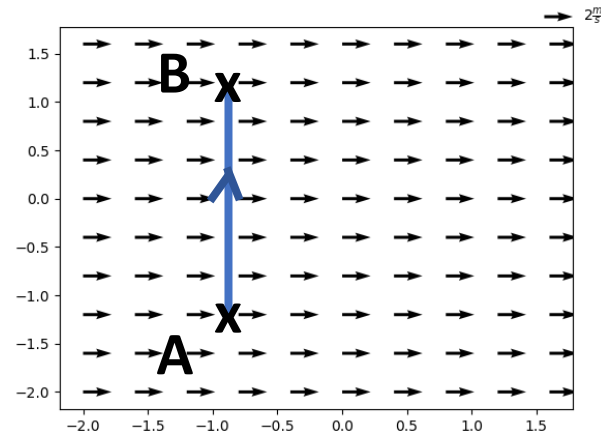


$$\int_A^B \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{dOM} =$$

C'est le cas du travail d'une force de freinage constante: $W(\vec{F}) = -F\ell$

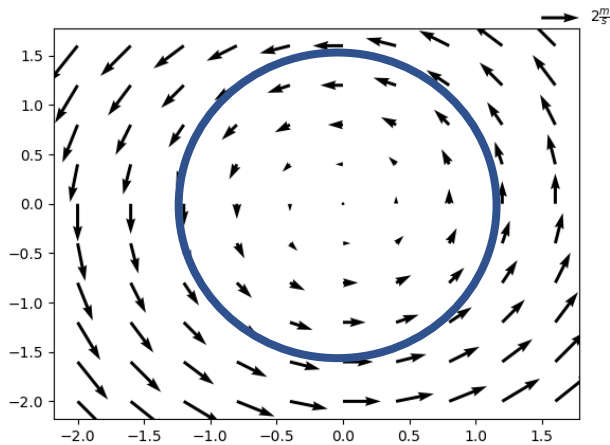
3) Chemin perpendiculaire au champ

$$\int_A^B \vec{A} \cdot \overrightarrow{dOM} = 0$$

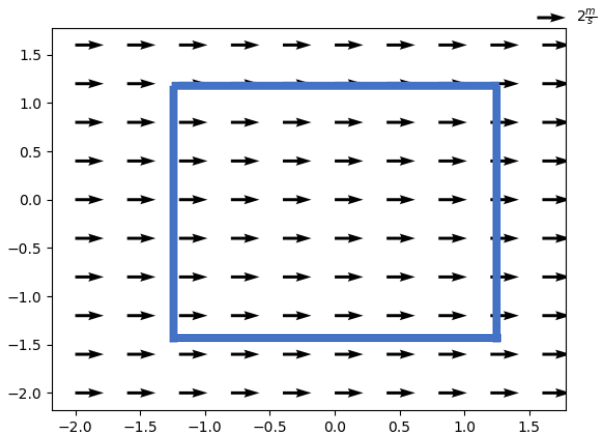


Contour fermé

- On aura souvent à calculer des circulations sur des chemins fermés appelés **contours**. On choisira toujours les contours de telle sorte que la circulation du champ soit facile à calculer

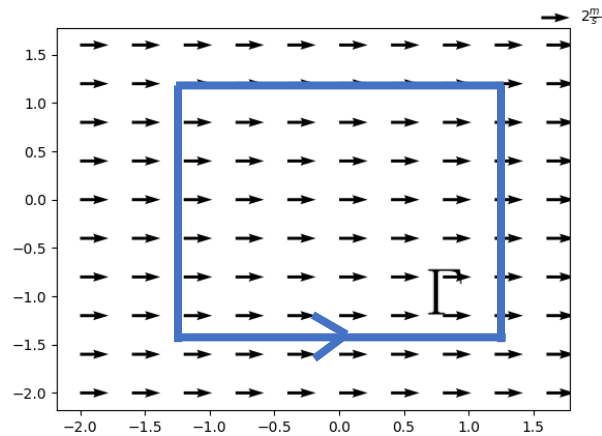


Pour un champ dont les lignes de champ forment des boucles:



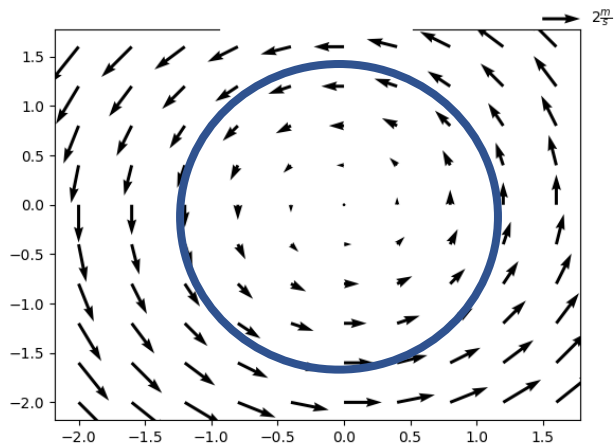
Pour un champ de direction uniforme:

Certains champs ont toujours une circulation nulle le long d'un contour fermé.



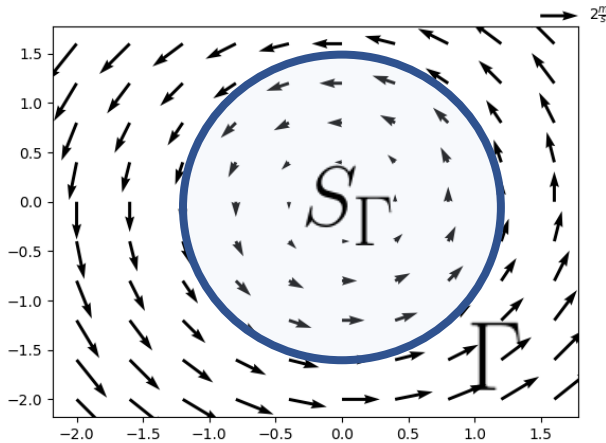
C'est en particulier le cas de tous les champs qui s'expriment comme les gradients de quelque chose:

Les champs qui ont des circulations non nulles sur un contour fermé forment généralement des « tourbillons ».



Théorème de Stokes

- La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour fermé est égal au flux du rotationnel de ce vecteur à travers la surface délimité par le contour:



$$\oint_{\Gamma} \vec{A}(M) \cdot d\vec{OM} = \iint_{S_\Gamma} \text{rot} \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}$$



$$\mathcal{C}(\vec{A}) \approx ||\vec{\text{rot}} \vec{A}|| S_\Gamma \Leftrightarrow ||\vec{\text{rot}} \vec{A}|| = \frac{\mathcal{C}(\vec{A})}{S_\Gamma}$$

On peut prendre ce théorème comme une « définition » du rotationnel.

- Le rotationnel est un vecteur qui traduit la tendance qu'à un champ **à tourner** autour d'un point.
 - Sa norme est d'autant plus grande que le champ tourne « vite » autour du point.
 - Il est orienté dans le même sens que le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ en S.I. (direction du tire-bouchon).
- Le rotationnel est un opérateur **vectoriel** agissant sur un champ **vectoriel**.
- Son expression en coordonnées cartésiennes est:

$$\vec{\text{rot}} \vec{A}(M, t) = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \vec{u}_z$$

En notation colonne:

$$\vec{\text{rot}} \vec{A}(M, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$