DS n°4

PSI 2021/2022

Durée 4 heures - Calculatrices **autorisées**

I. — Dissipation thermique dans les systèmes électroniques

❑ **1** — Les dimensions suivant y et z étant très grandes devant la largeur ℓ, on pourra négliger les effets de bords et supposer une invariance par translation suivant (Oy) et (Oz).

❑ **2** — Rédaction : on écrira bien le principe utilisé (premier principe infinitésimal) et le système sur lequel il est appliqué ! On obtiendra, comme, dans le cours :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\lambda}{\mu c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

❑ **3** — En procédant comme dans le cours, on obtient :

$$T(x,t) = \frac{T_1 - T_0}{\ell}x + T_0$$

La puissance thermique traversant le solide vaut :

$$\Phi = \lambda\frac{T_0 - T_1}{\ell}ab$$

❑ **4** — La relation précédente peut se réécrire :

$$T_0 - T_1 = \frac{\ell}{\lambda ab}\Phi$$

La résistance thermique vaut $\boxed{R_{\text{th}} = \frac{\ell}{\lambda ab}}$.

❑ **5** — $[h] = \text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2} = \text{kg.K}^{-1}.\text{s}^{-3}$. Remarque : il n'est pas nécessaire de convertir les Watt ici.

❑ **6** — L'expression du flux conducto-convectif à travers toute la surface latérale vaut :

$$\Phi_{cc} = h(T_0 - T_a)ab$$

La résistance thermique liée à la conducto-convection vaut donc : $\boxed{R_h = \frac{1}{hab}}$.

❑ **7** — Les différences applications numériques donnent (en prenant deux chiffres significatifs) :

$$R_{\text{th,Cu}} = 3,9.10^{-3}\text{K.W}^{-1},\quad R_{\text{th,Si}} = 1,1.10^{-2}\text{K.W}^{-1}\quad, R_h = 35\text{K.W}^{-1}$$

La résistance thermique du processeur étant très faible devant la résistance conducto-convective (résistance thermique de "contact" avec l'air), on pourra supposer la température à l'intérieur du microprocesseur comme <u>uniforme</u>.

❑ **8** — *Question ouverte :* Pour donner un ordre de grandeur, on modélise le processeur par un solide **de température uniforme** $T(t)$. Ce solide a une capacité thermique $C = mc = \mu ab\ell c$, En régime nominal, on suppose qu'il reçoit une puissance $P = 15\text{W}$ et on néglige tout phénomène d'évacuation de la chaleur. Le premier principe appliqué au microprocesseur entre t et $t + \mathrm{d}t$ donne :

$$\mathrm{d}U = \delta Q = P\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \mu ab\ell c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t) = P \Longleftrightarrow \boxed{T(t) = \frac{P}{ab\ell\mu c}t + T_i}$$

En prenant pour température initiale $T_i = 20°\text{C}$ et en supposant que la température à ne pas dépasser est la température "de jonction" donnée dans le tableau, on évalue Δt à l'aide de :

$$\Delta t = \frac{(T_{\text{JONCTION}} - T_i)ab\mu\ell c}{P} = \frac{80 \times (40 \times 24 \times 1,5.10^{-9}) \times 2330 \times 700}{15} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 13\text{s}}$$

❑ **9** — Le bilan d'énergie sur une tranche d'ailette de longueur $\mathrm{d}x$ en régime permanent donne :

$$\mathrm{d}^2U = 0 = (\Phi_{\text{th}}(x) - \Phi_{\text{th}}(x + \mathrm{d}x) - \delta\Phi_{\text{lat}})\mathrm{d}t$$
$$0 = \lambda\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}(x)\mathrm{d}xel_z - h(T(x) - T_a)\mathrm{d}S_{\text{lat}}$$

avec $\mathrm{d}S_{\text{lat}} = 2(e + l_z)\mathrm{d}x$. On en déduit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}(x) - \frac{2h(e + l_z)}{el_z\lambda}(T(x) - T_a) = 0}$$

On a donc $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{el_z\lambda}{2h(e + l_z)}}}$.

Il s'agit d'une équation du second ordre avec second membre. Pour déterminer la solution homogène, on résout le polynôme caractéristique :

$$r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0 \Rightarrow r = \pm\frac{1}{\delta}$$

On a donc $T^{(h)}(x) = A\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} + B\mathrm{e}^{\frac{x}{\delta}}$. On en déduit la forme générale de la solution :

$$T(x) = A\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} + B\mathrm{e}^{\frac{x}{\delta}} + T_a$$

En supposant que l'ailette est très grande, la température ne peut diverger donc $B = 0$. Pour trouver A, on utilise la condition initiale en x_1 :

$$T_R = A\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{\delta}} + T_a$$

ce qui nous permet de réécrire la solution sous la forme :

$$\boxed{T(x) = (T_R - T_a)\mathrm{e}^{-\frac{x - x_1}{\delta}} + T_a}$$

❑ **10** — Le flux thermique s'échappant de chaque ailette vaut :

$$\Phi = \Phi(x = x_1) = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x = x_1)el_z = \frac{\lambda(T_R - T_a)}{\delta}el_z$$

Le flux thermique total s'échappant du radiateur vaut

$$\Phi_{\text{tot}} = 6\frac{\lambda el_z(T_R - T_a)}{\delta}$$

et la résistance thermique équivalente du radiateur vaudra :

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{\delta}{6\lambda e l_z}}$$

Numériquement, on a $\delta = \sqrt{\dfrac{2.10^{-3} \times 100 \times 10^{-2}}{600 \times 1,2.10^{-2}}} = 0,0167\text{m}$. L'application numérique donne :

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{1,67 \times 10^{-2}}{6 \times 100 \times 2 \times 10^{-3} \times 1.10^{-2}} = 1,4\text{K.W}^{-1}}$$

Cette résistance est beaucoup plus faible que la valeur de R_h trouvée. La puissance thermique dissipée à l'aide du radiateur vaut : $\boxed{\Phi_{\text{tot}} = 36\text{W}}$.

II. — Champ électrique dans un électrofiltre

❑ **1** — En absence de charges, l'équation de Poisson s'écrit simplement : $\boxed{\Delta V = 0}$.

❑ **2** — **Électrofiltre humide** :

a) Il y a invariance par rotation autour de l'axe de l'émetrice et invariance par translation suivant ce même axe si on néglige les effets de bords. Le potentiel $V(M)$ ne dépend donc que de r. Pour l'exprimer, on pourra passer par le théorème de Gauss ou utiliser l'équation de Poisson, le laplacien en cylindrique étant donné en fin d'énoncé :

$$\begin{aligned}\Delta V(r) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r)\right) = 0\\ &\Longleftrightarrow r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) = A\\ &\Longleftrightarrow V(r) = A\ln r + B\end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont $V(r_e) = -U$ et $V(r_c) = 0$. On obtient : $\boxed{V(r) = U\dfrac{\ln\frac{r}{r_c}}{\ln\frac{r_c}{r_e}}}$.

b) Sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, on a :

$$E(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) \Longrightarrow E(r) = -\frac{U}{r\ln\frac{r_c}{r_e}}$$

Au contact de l'émettrice, le champ électrique vaut donc : $\boxed{E_e = -\dfrac{U}{r_e\ln\frac{r_c}{r_e}}}$. On cherche U tel que $|E_e| = E_0$, d'où : $\boxed{U_0 = E_0 r_e \ln\dfrac{r_c}{r_e}}$.

c) La valeur numérique donne $U_0 = 4,4.10^6 \times 1,25.10^{-3} \times \ln\dfrac{150}{1,25} = 26\text{kV}$.

❑ **3** — **Electrofiltre sec**

a) Les collectrices sont situées en $y = \pm s$. Lorsqu'on calcule le potentiel en $y = \pm s$, on obtient :

$$V(x, y = \pm s, z) = \frac{U}{\Lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \frac{\cosh\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right)} = 0$$

ce qui est cohérent.
Par ailleurs, si on se place sur la surface de la première émettrice, par exemple en $(0, r_e)$, on aura :

$$V(x=0, y=r_e, z) = -U = \frac{U}{\Lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi(r_e-2md)}{2s}\right)-1}{\cosh\left(\frac{\pi(r_e-2md)}{2s}\right)+1}\right) \Rightarrow \Lambda = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi(r_e-2md)}{2s}\right)-1}{\cosh\left(\frac{\pi(r_e-2md)}{2s}\right)+1}\right)$$

b) Les zones de champ fort sont les zones où les lignes de champs se resserrent, c.à.d près des émettrices. Le champ électrique est nul à équidistance de deux émettrices.

c) Sur la courbe, on voit que lorsque $y/s = r_e/s$ c'est à dire lorsque $y = r_e$, $|E_y| \approx 24\frac{U}{s}$. Sachant qu'il y a ionisation lorsque le champ électrique au voisinage de l'électrode est égal à E_0, on en déduit $\boxed{U_0 = \frac{E_0 s}{24}}$.
L'application numérique donne $U_0 \approx 28$kV. Les ordres de grandeur sont identiques.

II.A. — Influence des charges d'espace

❑ **4** — Le champ électrique allant dans le sens des potentiels décroissants, il est orienté suivant le vecteur $-\vec{e}_r$. Les anions , de charge négative, se déplacent donc suivant le vecteur $+\vec{e}_r$. Le courant est positif de la collectrice à l'émettrice. L'expression de $\vec{j}$ est $\vec{j}(M) = \rho(M)\vec{v}(M) = -\rho(M)b\vec{E}(M)$.

❑ **5** — Etant donné les invariances du problème, tous les champs ne dépendent que de r. Par ailleurs, en régime stationnaire, l'intensité traversant la surface latérale d'un cylindre de rayon r compris entre l'émettrice et la collectrice est constant :

$$i = \iint_{S(r)} \vec{j}(M) \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \text{cste}$$

On en déduit :

$$i = \rho(r)bE(r)2\pi rh \Rightarrow \boxed{\rho(r) = \frac{i}{2\pi rhbE(r)}}$$

❑ **6** — Il s'agit de l'équation de Maxwell-Gauss qui lie champ électrique et distribution de charges. En utilisant l'annexe, on a :

$$\mathrm{div}\vec{E}(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = \frac{i}{2\pi rhb\varepsilon_0 E(r)}}$$

En multipliant le côté gauche et le côté droit par $E(r)r^2$, on trouve l'équation demandé :

$$rE(r)\frac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = \frac{ir}{2\pi hb\varepsilon_0}$$

❑ **7** — On reconnaît dans le terme de gauche l'expression $uu' = \dfrac{(u^2)'}{2}$. En intégrant l'équation précédente entre un r quelconque et r_0, on a :

$$\frac{(rE(r))^2}{2} - \frac{(r_0E_0)^2}{2} = \frac{i}{4\pi hb\varepsilon_0}(r^2 - r_0^2) \Longrightarrow E^2(r) = \frac{E_0^2 r_0^2}{r^2} + \frac{i}{2\pi hb\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

$$\boxed{E(r) = -\sqrt{\frac{E_0^2 r_0^2}{r^2} + \frac{i}{2\pi hb\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)}}$$

Pour le passage à la racine, on fera bien attention à prendre la solution négative car $E(r) < 0$.

❑ **8** — Pour $r >> r_0$, l'expression précédente devient :

$$\boxed{E(r) = -\sqrt{\frac{1}{2\pi hb\varepsilon_0}} = 0,2\text{MV.m}^{-1}}$$

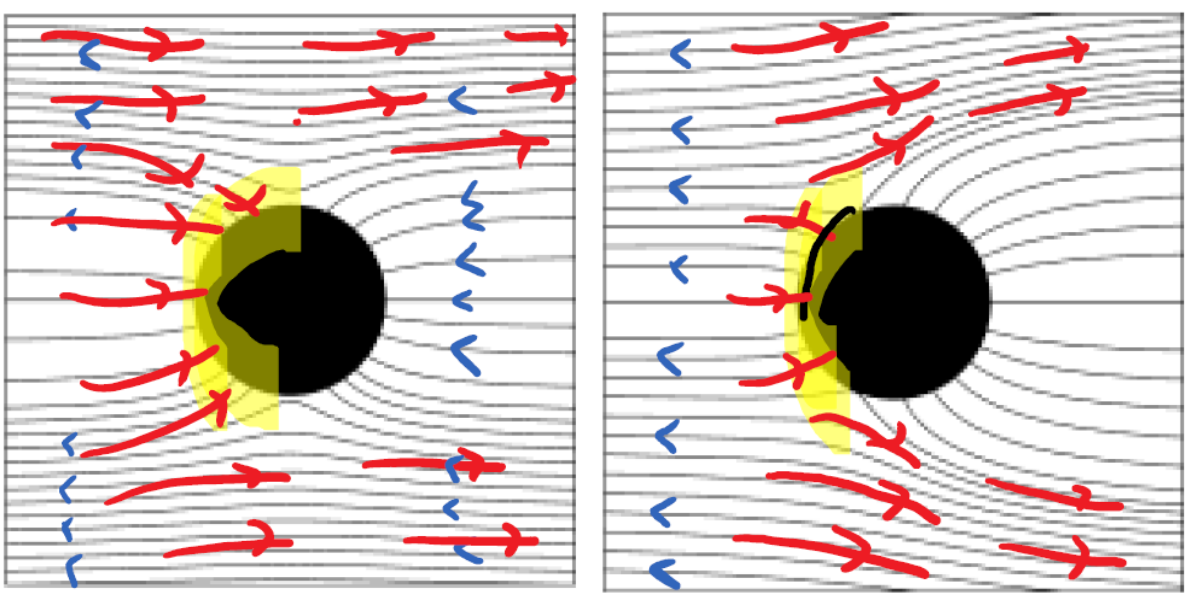
❑ **9** — On a :

$$\begin{cases} v &= bE = 60\text{m.s}^{-1} \\ \rho &= \dfrac{i}{2\pi r_c hbE} = 10^{-5}\text{C.m}^{-3} \\ n^\star &= \dfrac{\rho}{e} = 7.10^{13}\text{m}^{-3} = 7.10\text{cm}^{-3} \end{cases}$$

II.B. — Charge d'une particule sphérique : modèle de Pauthenier

II.B. —.1 Calcul de la charge limite

❑ **10** — Le champ électrique extérieur étant dirigé suivant $-\vec{u}_z$, les lignes de champs sont orientées de la droite vers la gauche. Les anions de charge négative se déplacent dans le sens opposé au sens de $\vec{E}$:



❑ **11** — Le champ $\vec{E}_1$ est le champ créé par une sphère de charge Q. Le théorème de Gauss montre simplement que ce champ vaut :

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$$

L'accroissement de $|Q|$ a tendance à augmenter la valeur de $\vec{E}_1$ et donc la zone où les lignes de champ *arrivent* vers la sphère. Réciproquement, il y a donc de moins en moins de lignes de champ qui partent de la sphère (cf figure ci-dessus). Comme $Q < 0$, les anions ont tendance à être de plus en plus repoussés par la sphère.

❑ **12** — S'il n'y a plus d'anions qui arrivent sur la sphère, cela signifie qu'il n'y a plus aucune ligne de champ qui part de la sphère. D'après les deux figures fournies, on comprend que la dernière ligne de champ à changer de sens (passage de $+\vec{u}_r$ à $-\vec{u}_r$ sera la ligne située en $\theta = \pi$. La limite est atteinte quand $\vec{E}_t(r = a, \theta = \pi) = \vec{0}$, c'est à dire quand :

$$E + 2E\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} - \frac{Q_{\text{lim}}}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = 0 \Rightarrow Q_{\text{lim}} = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E\left(1 + 2E\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right)$$

❑ **13** — L'application numérique donne : $Q_{\text{lim}} = -1,4.10^{-16}$ C ce qui représente un peu moins de 1000 charges élémentaires.

II.B. —.2 Loi horaire et durée de chargement

❑ **14** — On sait que :

$$[\varepsilon_0] = \frac{[Q]}{[E][r]^2} = \text{C.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$$
$$[b] = \text{m}^2.\text{V}^{-1}.\text{s}^{-1}$$
$$[\rho] = C.m^{-3}$$

La seule combinaison homogène est $\boxed{\tau_Q = \frac{\varepsilon_0}{|\rho| b}}$.

❑ **15** — On cherche t_{90} tel que :

$$0,9Q_{\text{lim}} = Q_{\text{lim}}\frac{t_{90}}{t_{90} + \tau_Q} \Rightarrow t_{90} = 9\tau_Q = 36\frac{\varepsilon_0}{|\rho| b}$$

L'application numérique donne $\boxed{\tau_Q = 21\text{ms}}$.

❑ **16** — Etant donné que chaque grain de poussière met 10 s à traverser l'électrofiltre, on peut considérer l'ionisation de la charge poussièreuse comme instantanée.

III. — Spectromètre de masse

❑ **1** — On utilisera la conservation de l'énergie mécanique de la particule de masse M entre le point S et le point O :

$$\frac{1}{2}Mv^2(O) + 2eV(O) = \frac{1}{2}Mv^2(S) + 2eV(S)$$
$$\frac{1}{2}Mv^2(S) = 2e(V(O) - V(S))$$
$$v(S) = \sqrt{\frac{4eU}{M}}$$

L'application numérique donne : $\boxed{v_{200} = \sqrt{\frac{4eU}{200m}} \approx 138.4\,\text{km.s}^{-1}}$ et $\boxed{v_{202} = \sqrt{\frac{4eU}{202m}} \approx 137.7\,\text{km.s}^{-1}}$.

❑ **2** — En présence d'un champ magnétique uniforme $\vec{b}$, la trajectoire des ions est circulaire. Les rayons des deux trajectoires vaut :

$$\boxed{R_{200} = \frac{200 m v_{200}}{2eB} \approx 2.889\,\text{m}}\,,\quad \boxed{R_{202} = \frac{202 m v_{202}}{2eB} \approx 2.904\,\text{m}}$$

❑ **3** — La distance entre les deux points d'impact est égal à la différence de diamètre des deux trajectoires, soit : $\boxed{d = 2(R_{202} - R_{200}) \approx 2.9\text{cm}}$