

# DS n°4

PSI 2021/2022

Durée 4 heures - Calculatrices **autorisées**

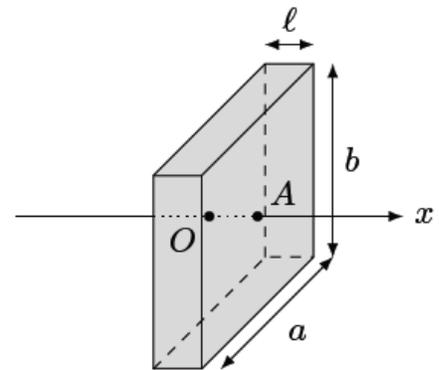
## I. — Dissipation thermique dans les systèmes électroniques

Les microprocesseurs des ordinateurs actuels sont constitués de plus d'un million de transistors répartis sur une plaque de silicium de quelques  $\text{cm}^2$ . L'évacuation de la chaleur dégagée par le microprocesseur est indispensable pour le bon fonctionnement du composant.

### I.A. — Transport thermique à travers un objet parallélépipédique

On étudie tout d'abord le transport thermique à travers un objet solide parallélépipédique, de dimensions  $a \times b \times \ell$  avec  $a \gg \ell$  et  $b \gg \ell$ , lorsque les faces repérées par les points  $O$  et  $A$  sont uniformément aux températures  $T_1$  et  $T_0$  respectivement (cf figure ci-contre).

L'objet est caractérisé par sa masse volumique  $\mu$ , sa capacité thermique massique  $c$  et sa conductivité thermique  $\lambda$ . L'origine de l'axe des  $x$  est prise en  $O$ .



□ 1 — Justifier qu'on puisse considérer que la température dans le solide est une fonction de  $x$  et  $t$  seulement.

□ 2 — Établir l'équation de la diffusion thermique vérifiée par la température  $T(x, t)$  dans le solide considéré.

□ 3 — Les températures  $T_0$  et  $T_1$  étant constantes, on étudie le régime stationnaire. Établir la loi d'évolution de la température dans le solide en fonction de  $x$ .

Exprimer la puissance thermique  $\Phi$  qui traverse le solide de  $O$  vers  $A$ .

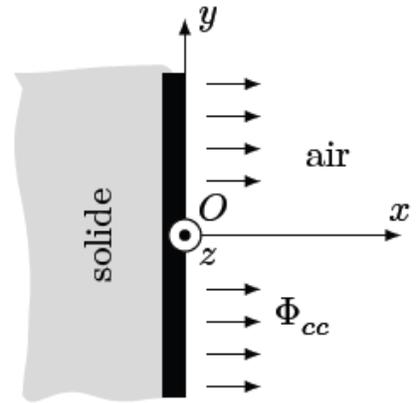
□ 4 — Montrer qu'on peut relier la différence de températures  $T_1 - T_0$  au flux  $\Phi$ , de façon analogue à la loi d'Ohm en électrocinétique, faire apparaître la résistance thermique  $R_{\text{th}}$  de l'objet parallélépipédique.

## I.B. — Echanges conducto-convectifs

Lorsqu'un solide est placé dans l'air dont la température est uniforme égale à  $T_a$ , l'échange thermique qui s'effectue à l'interface entre l'air et le solide est conducto-convectif. C'est à dire que dans une mince couche de fluide en surface du solide le gradient de température entraîne un mouvement de convection du fluide. Il en résulte une expression de la quantité de chaleur qui est transférée du solide vers l'air pendant  $dt$  à travers une surface de section  $dS = dydz$  :

$$\delta Q_{cc} = h(T_0 - T_a)dydzdt$$

où  $h$  est appelé coefficient de Newton, qui caractérise l'échange thermique entre le solide et le fluide et  $T_0$  est la température de surface du solide (cf. figure ci-contre).



□ 5 — Donner l'unité de  $h$  dans le système international d'unités.

□ 6 — Définir puis exprimer la résistance thermique  $R_h$  qui modélise l'échange thermique conducto-convectif pour une surface  $S$  de solide.

□ 7 — Dans le cas d'une interface silicium/air,  $h_s = 30$  S.I. si l'air environnant est immobile et vaut  $h_c = 300$  S.I. si l'air environnant est brassé, par exemple grâce à un ventilateur.

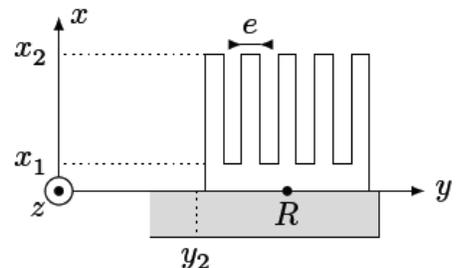
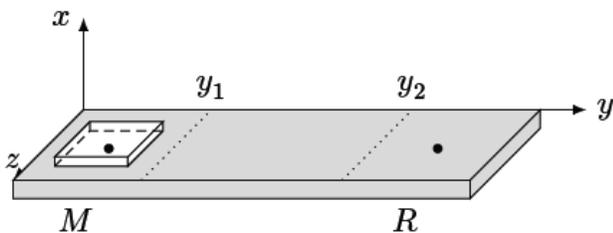
On considère un parallélépipède de dimensions  $a \times b \times \ell = 40 \times 24 \times 1,5 \text{ mm}^{-3}$ . Calculer les valeurs des résistances thermiques  $R_{th}$  dans le cas où l'objet est en cuivre puis en silicium, calculer aussi  $R_h$  l'air étant immobile, commenter.

□ 8 — Cette question est une question ouverte type "résolution de problème". Dans le cas du microprocesseur dont la documentation est fournie en annexe, estimer la durée  $\Delta t$  au bout de laquelle celui-ci est détruit en l'absence de dispositif de refroidissement.

## I.C. — Utilisation d'un caloduc

Pour maintenir le microprocesseur à sa température de fonctionnement optimale  $\approx 70^\circ\text{C}$ , on utilise un radiateur sur lequel souffle l'air brassé par un ventilateur d'une part et un dispositif appelé caloduc d'autre part, qu'on se propose d'étudier.

Le caloduc est une enceinte métallique (elle est parfois en silicium) creuse, de volume constant, plate et longue, qui relie thermiquement le microprocesseur situé en  $M$  au radiateur situé en  $R$ . La plupart des ordinateurs portables en sont équipés. La figure ci-dessous à gauche représente le caloduc vu de l'extérieur.



Dans un premier temps, on étudie le radiateur (cf à droite) qui est une pièce métallique qui présente une surface de contact avec l'air très importante, grâce à un grand nombre d'ailettes parallélépipédiques représentées en coupe sur la figure. La dimension des ailettes dans la direction  $\vec{e}_z$  est notée  $l_z$ ,  $e$  selon  $\vec{e}_y$  et  $H = x_2 - x_1$  selon  $\vec{e}_x$ .

Pour étudier l'évolution de la température dans les ailettes, on isole une ailette, que l'on assimile à un milieu unidimensionnel selon  $\vec{e}_x$ . La température est notée  $T(x)$ , elle est uniforme dans une section de l'ailette. Enfin, comme l'ailette est plongée dans l'air, qui est en permanence renouvelé grâce au ventilateur, on considère que l'air qui entoure l'ailette a une température  $T_a = 20^\circ\text{C}$ , et on se limite à l'étude du régime stationnaire.

On note  $T_R$  la température au niveau du socle du radiateur, on considère que c'est la température en  $T(x_1)$  sur chacune des ailettes.

□ 9 — Après avoir fait un schéma correspondant à l'étude d'une ailette considérée isolément, effectuer un bilan d'énergie sur une tranche de longueur  $dx$  de l'ailette.

Déduire de l'équation précédente l'équation différentielle vérifiée par  $T(x)$  :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} (T(x) - T_a) = 0$$

où  $\delta$  est à exprimer en fonction de  $\lambda$ ,  $e$ ,  $l_z$  et  $h$ .

Résoudre cette équation en considérant que la longueur  $H$  de l'ailette est très grande, c'est à dire  $H \rightarrow \infty$ .

□ 10 — Calculer la puissance thermique évacuée par le radiateur complet, constitué de 6 ailettes et donner la valeur de la résistance thermique équivalente au radiateur.

Pour l'application numérique on prendra  $\lambda = 100\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $e = 2\text{mm}$  et  $l_z = 1\text{cm}$ .

## I.D. — Annexes

### *Données sur le cuivre et le silicium*

	Cu	Si
Numéro atomique	29	14
Masse atomique relative ( $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ )	63,546	28,0855
Température de fusion ( $^\circ\text{C}$ )	1083	1410
Température d'ébullition ( $^\circ\text{C}$ )	2567	2355
État de la matière à $20^\circ\text{C}$ et 1 bar	solide	solide
Densité à $20^\circ\text{C}$ ( $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ )	8,92	2,33
Niveaux d'oxydation	1 ou 2	-4 ou 4
Électronégativité	1,75	1,74
Rayon atomique (pm)	127,8	117,6
Configuration électronique	$[\text{Ar}]3d^{10}4s^1$	$[\text{Ne}]3s^23p^2$
Énergie d'ionisation (eV)	7,7264	8,1517
Fraction de masse dans le géosphère (%)	0,01	25,8
Conductivité électrique ( $\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ )	$59,6 \times 10^6$	$2,52 \times 10^{-4}$
Conductivité thermique ( $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ )	401	148
Chaleur massique ( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ )	380	700

### Spécification du microprocesseur i7-4500U

Status	Launched
Launch Date	Q3'13
DMI2	5 GT/s
Processor Number	i7-4500U
# of Cores	2
# of Threads	4
Clock Speed	1.8 GHz
Max Turbo Frequency	3 GHz
Intel® Smart Cache	4 MB
Instruction Set	64-bit
Instruction Set Extensions	SSE 4.1/4.2, AVX 2.0
Max CPU Configuration	1
T <sub>JUNCTION</sub>	100°C
Package Size	40mm x 24mm x 1.5mm
Sockets Supported	FCBGA1168
Low Halogen Options Available	See MDDS

## II. — Champ électrique dans un électrofiltre

Les poussières, petites particules en suspension dans l'air, sont des polluants fréquemment présents dans les fumées industrielles. Leur émission est soumise à une réglementation toujours plus stricte qui oblige les industriels à équiper leurs installations de dispositifs de dépoussiérage. Les électrofiltres peuvent jouer ce rôle dans des installations aussi variées que les centrales thermiques, les cimenteries, les incinérateurs, les aciéries ou encore les verreries.

Un électrofiltre est essentiellement constitué de deux électrodes entre lesquelles on applique une forte tension électrique. L'une d'elles, appelée collectrice, est mise à la terre alors que l'autre, nommée émettrice, est portée à un potentiel négatif  $-U$  provoquant l'ionisation du gaz à son voisinage. Les anions ainsi produits se déplacent vers la collectrice, correspondant au passage d'un courant au travers du gaz. En chemin, certains de ces anions se fixent sur les grains de poussière qui acquièrent ainsi une charge négative. Ces particules polluantes sont alors attirées par la collectrice et s'y fixent en formant un dépôt qu'on élimine en ébranlant l'électrode à coups de marteau (électrofiltre sec) ou en la rinçant par un liquide (électrofiltre humide). Le résidu est récupéré dans des trémies, puis évacué.

Dans les électrofiltres secs, les émettrices sont des fils verticaux et les collectrices des plaques verticales entre lesquelles la fumée à dépoussiérer s'écoule horizontalement (partie gauche de la figure ci-dessous).

Dans les électrofiltres humides, l'émettrice est un fil vertical et la collectrice un cylindre coaxial, la fumée s'écoulant selon l'axe de ce tube (partie droite de la figure ci-dessous).

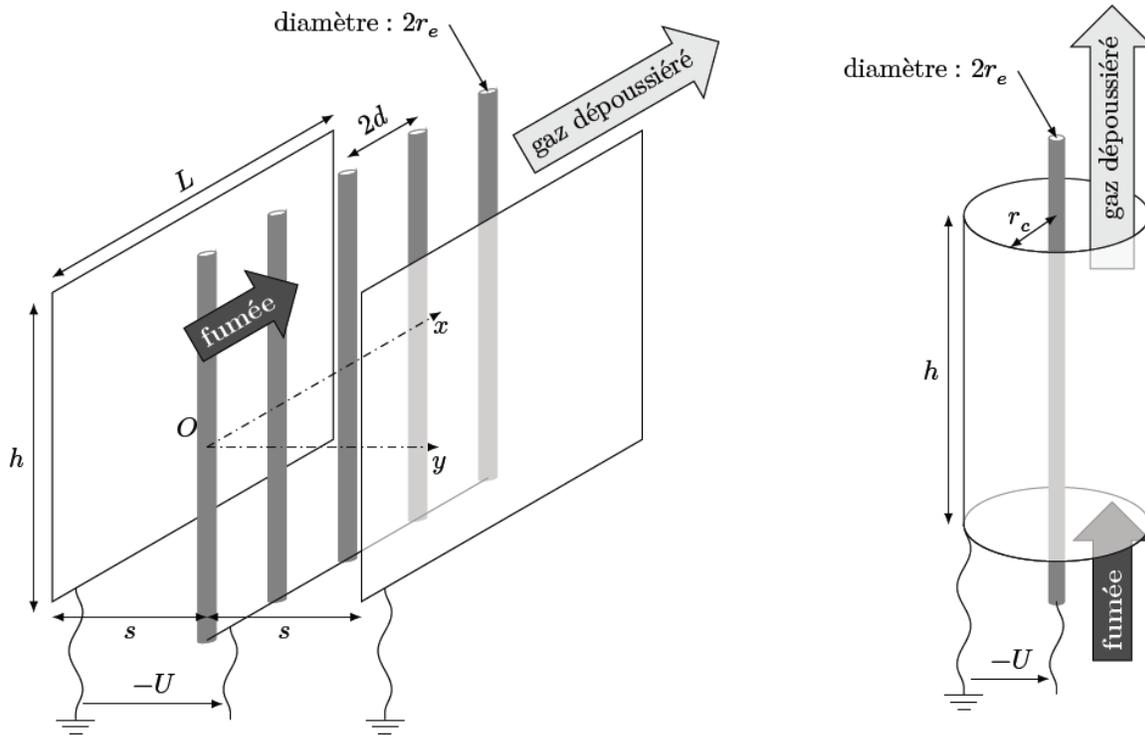


FIGURE 1 – Deux types d'électrofiltres. Gauche : électrofiltre sec. Droite : électrofiltre humide

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie. Une liste de valeurs numériques et de formules figure en fin d'énoncé.

## II.A. — Champ électrique à vide et tension seuil

Selon des données expérimentales, l'ionisation du gaz au voisinage de l'émettrice se produit lorsque la norme du champ électrique  $y$  dépasse une valeur seuil  $E_0$  dépendant du rayon  $r_e$  de cette électrode, de la pression et de la température. Dans tout le problème,  $r_e = 1,25\text{kgms}^{-2}$  et  $E_0 = 4,4 \cdot 10^6 \text{Vm}^{-1}$ .

□ 1 — Pour une configuration donnée des électrodes, le champ électrique  $\vec{E}$  et le potentiel électrostatique  $V$  dans l'espace inter-électrode dépendent de la tension  $U$  imposée. Pour les déterminer, on se place à la limite d'apparition du courant ce qui conduit à supposer l'espace inter-électrode vide de charge. Dans ces conditions, comment s'écrit l'équation de Poisson?

□ 2 — **Électrofiltre humide :**

- On considère tout d'abord l'électrofiltre humide, tubulaire (figure 1, droite). Le rayon de la collectrice portée à la masse est noté  $r_c$ . En choisissant un système de coordonnées bien adapté et en négligeant les effets de bord, de quelle(s) variable(s) le potentiel électrostatique  $V$  dépend-il? Donner son expression en fonction de(s) variable(s) éventuel(le)s et de  $U$ ,  $r_e$  et  $r_c$ .
- Exprimer le champ électrique au contact de l'émettrice et en déduire la valeur  $U_0$  à donner à  $U$  pour qu'il atteigne la valeur  $E_0$ .
- Calculer numériquement  $U_0$  pour  $r_c = 150\text{mm}$ .

### □ 3 — Electrofiltre sec

On raisonne toujours sous les hypothèses de la question 1, mais on considère désormais un électrofiltre sec formé de plaques et de fils, caractérisé par les distances  $s$  et  $d$  définies sur la figure 1 droite. L'origine des coordonnées est placée sur l'un des fils, à égale distance des deux collectrices. Tout effet de bord étant négligé, le potentiel électrostatique est donné par

$$V(x, y, z) = \frac{U}{\Lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left( \frac{\cosh\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)} \right)$$

- Vérifier que cette expression est compatible avec la présence des collectrices et trouver l'expression de  $\Lambda$  sous la forme d'une série de fonctions de  $d$ ,  $s$  et  $r_e$ .
- Les équipotentielles sont représentées sur la figure du document réponse. Compléter cette figure en y traçant en couleur des lignes de champ orientées. Quelles sont les zones de fort champ? Existe-t-il des points où le champ électrique s'annule?
- La figure 2 montre le comportement de  $|E_y(x=0, y, z=0)|$  en fonction de  $y$ . Ce graphique, obtenu pour  $d/s = 4/3$ , utilise les variables adimensionnées  $|E_y|/(U/s)$  (en ordonnée) et  $y/s$  (en abscisse). Quelle valeur  $U_0$  faut-il donner à  $U$  pour provoquer l'ionisation près de l'électrode émettrice? Exprimer la réponse en fonction de  $s$  et  $E_0$ , puis estimer la valeur numérique de  $U_0$  pour  $s = 150\text{mm}$ . Comparer l'ordre de grandeur obtenu avec celui concernant l'électrofiltre tubulaire.

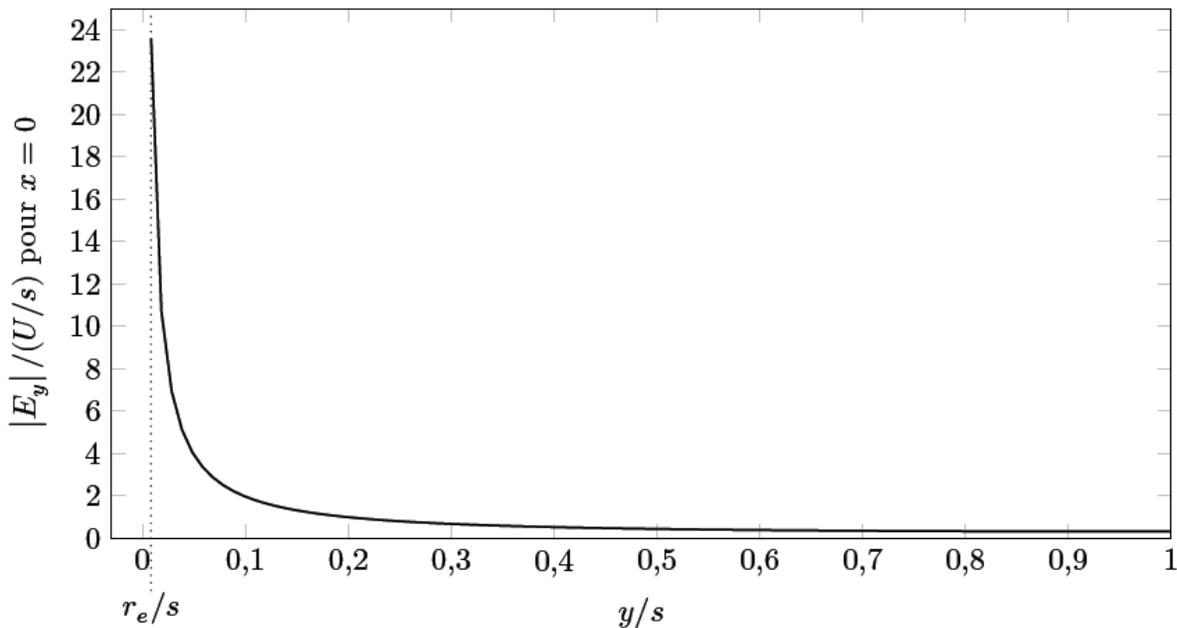


FIGURE 2 – Variations du champ électrique dans un électrofiltre sec

### II.B. — Influence des charges d'espace

Dès lors que la tension  $U$  dépasse la valeur seuil  $U_0$ , un courant d'intensité  $i$  s'instaure dans l'électrofiltre et l'espace inter-électrode se peuple d'anions dont la présence, caractérisée par les densités volumiques de

charge  $\rho(M)$  et de courant  $\vec{j}(M)$ , modifie le champ électrique. Ces anions sont supposés tous identiques et se déplacent dans le champ électrique  $\vec{E}(M)$  avec une vitesse  $\vec{v}(M) = -b\vec{E}(M)$  avec  $b = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$  dans les conditions envisagées.

La connaissance des champs couplés  $\vec{E}(M)$  et  $\rho(M)$  constitue un enjeu majeur car ces grandeurs déterminent la migration des grains de poussière. Dans un électrofiltre sec, leur détermination s'appuie sur de lourdes méthodes numériques. Nous l'aborderons ici uniquement dans le cas des électrofiltres humides en négligeant tout effet de bord. L'influence des poussières mobiles sur le champ est négligée.

□ 4 — La collectrice tubulaire et l'émettrice coaxiale ont pour hauteur  $h$ . On note  $j = \vec{j} \cdot \vec{e}_r$  et  $E = \vec{E} \cdot \vec{e}_r$  les projections sur le vecteur unitaire radial usuel des coordonnées cylindriques et  $r$  la distance d'un point à l'axe.

Un courant d'intensité  $i > 0$  circule radialement d'une électrode vers l'autre. Dans quel sens? Exprimer  $j$  en fonction des variables qui s'imposent.

□ 5 — Exprimer la densité volumique de charge en fonction de  $i$ ,  $E$ ,  $h$ ,  $r$  et  $b$ .

□ 6 — Quelle équation de l'électromagnétisme exprime localement la modification du champ électrique par les ions? Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$rE \frac{d(rE)}{dr} = \frac{ir}{2\pi h \epsilon_0 b}$$

□ 7 — À une certaine distance  $r_0 > r_e$  de l'axe, le champ électrique prend la valeur  $E_0$ . En déduire l'expression de  $E$ .

□ 8 — Pour  $r$  suffisamment grand (quelques centimètres en pratique), on considère généralement que le champ devient grossièrement uniforme. Quelle est alors son expression approchée? Quelle est ici sa valeur numérique si  $i/h = 0,70 \text{mA}^{-1}$ ?

□ 9 — Dans cette région de quasi-uniformité, calculer la vitesse des ions, puis la densité volumique de charge  $\rho$  et le nombre d'ions par centimètre cube au voisinage de la collectrice ( $r = r_c$ ), en supposant que chacun porte une charge élémentaire.

## II.C. — Charge d'une particule sphérique : modèle de Pauthenier

On aborde dans cette partie le processus de chargement des poussières, assimilées à des sphères de diamètre  $d = 2a$ . Ces grains sont initialement neutres mais les anions mobiles le long des lignes de champ les rencontrent et s'y fixent, leur communiquant progressivement une charge  $Q(t) < 0$ . Le champ  $\vec{E}$  étudié dans la partie précédente est désormais supposé uniforme et connu. Chaque grain de poussière chargé et polarisé sous l'influence de  $\vec{E}$  déforme localement les lignes de champ. Pour éviter toute confusion, on note  $\vec{E}_t$  le champ tenant compte simultanément de  $\vec{E}$  et de la présence des grains.

On raisonne sur un grain unique immobile et on adopte momentanément un nouveau système de coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  de type sphérique, dont l'origine se situe au centre du grain et tel que  $\vec{E} = E \vec{u}_z$  avec  $E < 0$  (figure 3). Des considérations d'électrostatique montrent que, à l'extérieur du grain ( $r \geq a$ ), le champ électrique total est donné par

$$\vec{E}_t = \vec{E} + E \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{a^3}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) + \vec{E}_1$$

Dans cette expression,  $\vec{E}_1$  désigne le champ que créerait autour d'elle la particule sphérique portant  $Q$  si elle était seule dans l'espace. La constante sans dimension  $\epsilon_r$  dépend de la nature physico-chimique de la poussière. Les lignes de champ sont tracées sur la figure du document réponse pour  $Q = 0$  puis pour une valeur négative de  $Q$ .

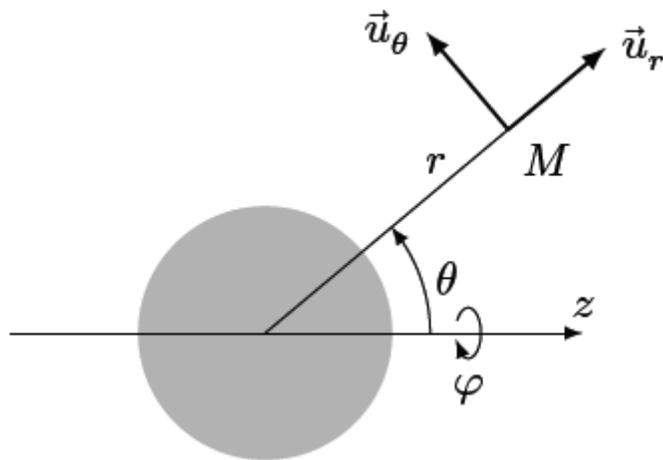


FIGURE 3 – Coordonnées sphériques autour d'une poussière sphérique

### II.C. —.1 Calcul de la charge limite

□ 10 — Orienter par des flèches bleues les lignes de champ de la figure du document réponse et représenter le mouvement des anions par des flèches rouges. On précise que les lignes de champ qui rencontrent la sphère en la pénétrant ne portent pas d'anions : la sphère peut capturer des anions mais ne peut pas en émettre.

□ 11 — Quelle est l'expression de  $\vec{E}_1$  ? L'accroissement de  $|Q|$  a-t-il tendance à réduire ou à élargir la portion de la sphère d'où *partent*, vers des valeurs croissantes de  $r$ , les lignes de champ ? Favorise-t-il ou s'oppose-t-il à l'arrivée de nouveaux anions sur la sphère ?

□ 12 — Le grain de poussière atteint sa charge limite  $Q_{\text{lim}}$  lorsque les lignes de champ sont si distordues qu'aucun anion ne peut plus lui parvenir. Montrer que

$$Q_{\text{lim}} = 4\pi\epsilon_0 a^2 E \left( 1 + 2 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)$$

□ 13 — Calculer numériquement  $Q_{\text{lim}}$  pour  $\epsilon_r = 10$ ,  $d = 2a = 2,0\mu\text{m}$ ,  $|E| = 5,0 \cdot 10^5 \text{Vm}^{-1}$ . Combien de charges élémentaires cela représente-t-il ?

### II.C. —.2 Loi horaire et durée de chargement

Le mécanisme décrit dans la question précédente est régi par la loi horaire

$$Q(t) = Q_{\text{lim}} \frac{t}{t + \tau_Q}$$

□ 14 — Sachant que  $\tau_Q$  ne dépend que de  $\epsilon_0$ ,  $b$  et  $|\rho|$  (où  $\rho$  est la densité volumique de charge des anions), en donner une expression par analyse dimensionnelle. Le résultat exact s'obtient en plaçant un facteur 4 au numérateur.

□ 15 — Calculer numériquement la durée  $t_{90}$  au bout de laquelle un grain de poussière atteint 90percent de sa charge limite pour  $b = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$  et  $|\rho| = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{Cm}^{-3}$ .

□ 16 — La fumée poussiéreuse s'écoule à la vitesse  $u_0 = 1 \text{ms}^{-1}$  en traversant l'électrofiltre sur toute sa longueur  $L = 10\text{m}$ . Quelle conclusion peut-on tirer de la valeur numérique de  $t_{90}$  ?

## II.D. — Annexes

### Analyse vectorielle

En coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div} \vec{A}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta \psi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A}(r, \theta, z) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

### Données numériques

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$$

Permittivité diélectrique du vide

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$$

Charge élémentaire

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Constante d'Avogadro

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

Viscosité dynamique de l'air à 150 °C

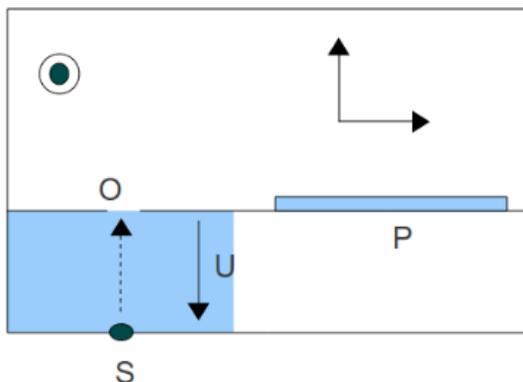
$$\eta_a = 2,4 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

Masse volumique de l'air à 150 °C

$$\rho_a = 0,84 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

## III. — Spectromètre de masse

Le spectrographe de masse est un appareil permettant, entre autres, de séparer les différents isotopes d'un élément dans un échantillon (pour les compter ou pour en sélectionner un).



Un faisceau de particules chargées est constitué des ions de deux isotopes du mercure :  $^{200}\text{Hg}^{2+}$  et  $^{202}\text{Hg}^{2+}$  notés respectivement (1) et (2). Ce faisceau est émis par la source S avec une vitesse quasi nulle, puis accéléré par une tension  $U > 0$ . Il pénètre alors en O dans une zone de champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  uniforme, orthogonal au faisceau incident.

---

Données : masse d'un nucléon  $m = 1,67 \times 10^{-27}$  kg (la masse de l'électron sera négligée devant  $m$ ) ;  $U = 10$  kV ;  $B = 0,10$ T ;  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C.

- **1** — Exprimer les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  acquises respectivement par les isotopes (1) et (2) suite à l'accélération par la tension  $U$ .
- **2** — Déterminer la trajectoire des ions dans la zone de champ magnétique. Exprimer les rayons  $R_1$  et  $R_2$  des trajectoires des isotopes (1) et (2).
- **3** — On recueille les particules sur une plaque photographique  $P$  après qu'elles aient fait demi-tour. Exprimer puis calculer la distance  $d$  entre les deux traces observées.