

DS n°4 (difficile)

PSI 2022/2023

Durée 4 heures - Calculatrices **autorisées**

I. — Décantation dans le traitement des eaux.

La clarification par décantation est une des étapes réalisées dans le traitement des eaux des stations d'épuration. Elle consiste à éliminer les particules polluantes en suspension dans l'eau polluée.

L'eau polluée, c'est-à-dire chargée en particules non désirées, circule en continu dans le bassin de décantation (Fig. 1), à faible vitesse horizontale \vec{u} . Les particules ont le temps de se déposer au fond du bassin et l'eau de sortie est ainsi clarifiée.

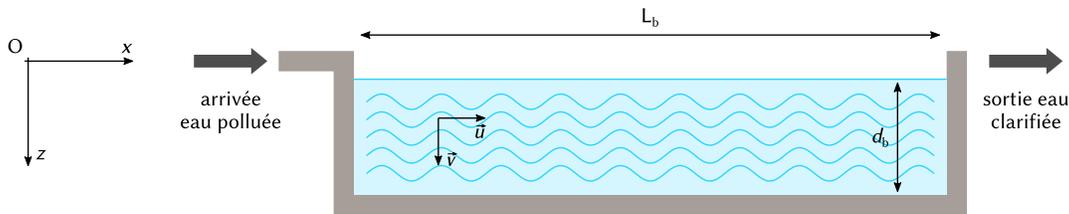


FIGURE 1 – Bassin de décantation.

Le bassin de décantation est de longueur L_b et de profondeur d_b , sa largeur est indifférente. On note respectivement η et ρ_e la viscosité dynamique et la masse volumique de l'eau polluée. η et ρ_e sont supposées constantes.

On définit le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au bassin. L'axe (O_z) est vertical descendant. Le niveau d'entrée de l'eau dans le bassin correspond à la cote $z = 0$.

On suppose que les particules polluantes sont sphériques, de rayon r , et qu'elles sont soumises à la force de frottement fluide $\vec{F} = -6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot \vec{v}$, où \vec{v} est la vitesse des particules.

On note ρ_0 la masse volumique des particules polluantes, supposée constante. On a $\rho_0 > \rho_e$. On considère que l'eau arrive en amont du bassin avec une densité en particules polluantes notée N_0 .

I.A. — Décantation statique

Dans un premier temps, l'eau ne circule pas horizontalement, $\vec{u} = \vec{0}$, et les particules polluantes qu'elle contient chutent verticalement.

Compte-tenu des phénomènes de transport des particules polluantes dans le bassin, la densité en particules polluantes n'est pas uniforme sur la hauteur du bassin. Elle dépend de la profondeur z . Dans le bassin, on note $n(z)$ la densité en particules polluantes à l'altitude z et n_0 la valeur associée à l'altitude $z = 0$, soit $n_0 = n(z = 0)$.

□ 1 — A partir de l'équation différentielle du mouvement, issue de la seconde loi de Newton, établir, en fonction de ρ_0 , ρ_e , r , η et de l'accélération g de la pesanteur, la vitesse limite $\vec{v}_\ell = v_\ell \cdot \vec{e}_z$ atteinte par ces particules. Quel est le signe de v_ℓ ? Exprimer en fonction de ρ_0 , r et de η , le temps caractéristique τ_c d'établissement de cette vitesse limite.

On supposera par la suite que la constante de τ_c est très faible devant le temps de sédimentation (le temps de chute dans le bassin) de sorte que le mouvement des particules est considéré uniforme à la vitesse \vec{v}_ℓ .

□ 2 — Cette chute des particules est à l'origine d'un courant convectif vertical des particules. On note $\vec{j} = j(z) \cdot \vec{e}_z$ le vecteur densité de courant de particules associé. Préciser l'unité de \vec{j} , puis exprimer le vecteur \vec{j} en fonction de $n(z)$ et de \vec{v}_ℓ .

En plus du courant précédent, on observe l'existence d'un second courant qui résulte d'un phénomène de diffusion. On note D le coefficient de diffusivité des particules dans l'eau et $\vec{j}_D = j_D(z) \cdot \vec{e}_z$ le vecteur densité de courant de particules associé à ce second courant.

□ 3 — Rappeler la loi de Fick et préciser les unités des grandeurs qui interviennent. Justifier qualitativement l'existence de ce courant de diffusion. Préciser s'il est ascendant ou descendant.

□ 4 — En régime permanent, ces deux courants se compensent. En déduire, en fonction de n_0 , D et de v_ℓ l'expression de la densité de particules $n(z)$. Représenter graphiquement la fonction $n(z)$ en fonction de z .

□ 5 — Par conservation du nombre de particules sur une tranche verticale du bassin, exprimer n_0 en fonction de N_0 , D , d_b et de v_ℓ .

□ 6 — Définir en fonction de d_b , D et de v_ℓ , un temps caractéristique de sédimentation τ_S , ainsi qu'un temps caractéristique τ_D de diffusion des particules sur la hauteur du bassin.

□ 7 — Exprimer n_0 en fonction de N_0 , τ_S et τ_D . A quelle condition portant sur τ_S et τ_D , la décantation statique permet-elle une clarification de l'eau?

I.B. — Clarification dynamique de l'eau polluée

Dans un second temps, l'eau polluée est mise en mouvement et s'écoule avec une vitesse horizontale \vec{u} . Un aspirateur situé au fond du bassin aspire maintenant les particules polluantes.

Un modèle simple considère que le mouvement des particules polluantes est la combinaison d'un mouvement horizontal de vitesse \vec{u} dû à l'entraînement de l'eau et d'un mouvement vertical de chute à la vitesse constante \vec{v}_ℓ déterminée précédemment dans l'étude de la décantation statique. L'eau sera clarifiée si les particules polluantes introduites à l'entrée du bassin ont le temps de tomber au fond avant que l'eau d'entraînement, injectée à l'entrée du bassin en $x = 0$, ne soit parvenue à l'autre extrémité de sortie du bassin, située en $x = L_b$.

□ 8 — Définir, en fonction de L_b et de u , un temps de traversée τ_T du bassin. A quelle condition, portant sur τ_T et τ_S , la clarification dynamique est-elle efficace?

II. — Le coeur d'un réacteur nucléaire

Certaines données sont présentées en fin de problème.

Le principe de fonctionnement d'une centrale nucléaire est représenté figure 2. Le réacteur chauffe une certaine quantité d'eau qui circule, en boucle fermée, dans le circuit primaire. L'eau du circuit primaire permet de vaporiser l'eau contenue dans le circuit secondaire dont la circulation assure la rotation de turbines couplées à des alternateurs. Le circuit tertiaire est utilisé pour liquéfier l'eau du circuit secondaire en sortie des turbines, avant qu'elle ne soit à nouveau injectée dans les générateurs de vapeur.

Centrale nucléaire

Réacteur à Eau Pressurisée (REP)

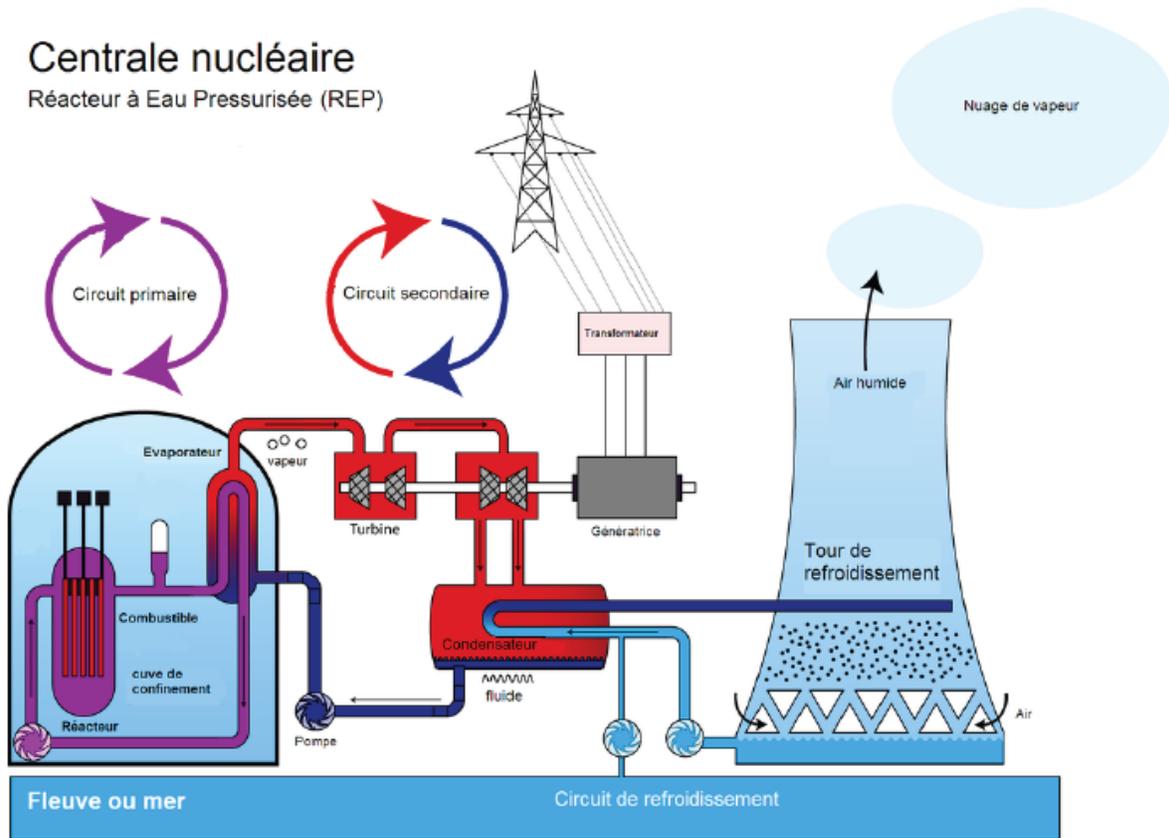


Figure 2 Principe d'une centrale nucléaire (source : Wikipedia)

Au cœur d'une tranche de centrale (qui comporte en général 2 ou 3 tranches), le combustible nucléaire est sous forme de pastilles cylindriques (figure 1). Ces pastilles sont regroupées en crayons, eux-même réunis en assemblages (figure 3). Un assemblage contient 600 kg de dioxyde d'uranium enrichi. Un cœur de réacteur est l'association de 241 assemblages (figure 4).



Figure 1 Pastilles de combustible d'uranium

II.A. — Quelques analyses préliminaires

❑ 1 — Pourquoi produire le combustible sous forme de pastilles au lieu de cylindres prêts à mettre dans la gaine du crayon? Quel est l'intérêt de faire une multitude de petits crayons de combustibles plutôt que quelques-uns, plus gros?

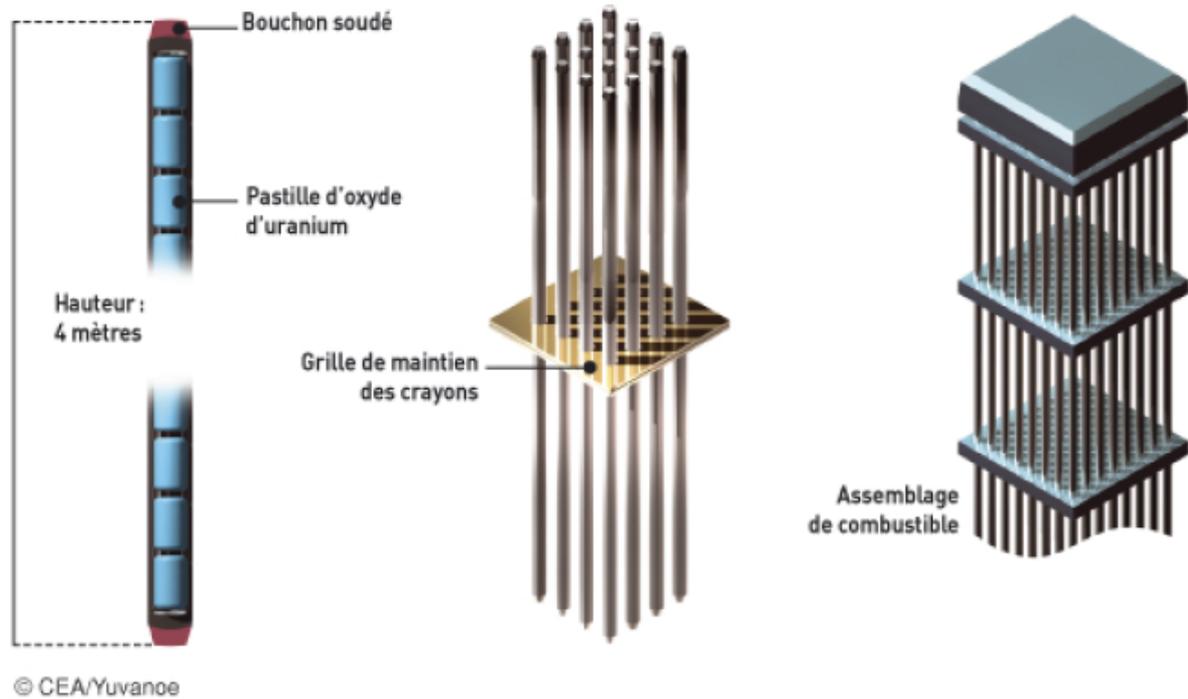


Figure 3 Assemblage du combustible au cœur d'une centrale

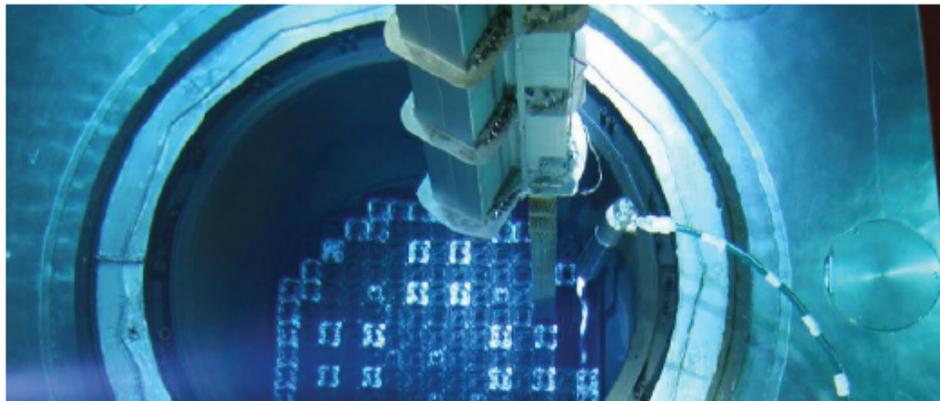


Figure 4 Vue du cœur d'un réacteur

□ 2 — Un assemblage est un quadrillage de 17×17 emplacements. Or, il ne contient que 265 crayons de combustible. À quoi peuvent servir les autres emplacements ?

□ 3 — Vérifier que la surface totale d'échange entre l'eau du circuit primaire et les crayons indiquée dans les données (environ 8000 m^2) est cohérente avec la structure du cœur du réacteur.

II.B. — Approche théorique

Modélisation

On modélise un crayon radioactif par un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R dans lequel les réactions nucléaires produisent une puissance volumique uniforme. Le régime est considéré stationnaire. On utilise le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : (r, θ, z) .

□ 4 — Justifier que la température est une fonction de r uniquement. Que peut-on en déduire sur la densité de courant thermique \vec{j} ?

□ 5 — La figure 5 présente quatre profils de température à l'intérieur du crayon, ainsi que les expressions analytiques de $T(r)$ associées (pour chacune de ces expressions, la constante K est une constante positive). Parmi ces profils, quel est le seul susceptible de correspondre au crayon radioactif étudié? Justifier votre réponse à partir d'arguments qualitatifs uniquement (sans aucun calcul).

□ 6 — En admettant que le profil identifié représente réellement le champ de température à l'intérieur du crayon, relier la constante K aux grandeurs physiques pertinentes dont les valeurs numériques sont données dans le document réponse.

□ 7 — À l'aide des caractéristiques du coeur données dans le document réponse, proposer une estimation de la puissance volumique libérée dans le combustible lorsque le réacteur est en fonctionnement nominal.

□ 8 — Proposer une définition plausible de la *puissance linéique*. Confirmer (ou non) cette définition par un calcul d'ordre de grandeur (une page maximum). Comment expliquer l'existence d'une puissance linéique maximale?

□ 9 — En supposant que la température en $r = R$ est celle de l'eau au voisinage des crayons, calculer numériquement la température au " coeur " du crayon (en $r = 0$). Commenter.

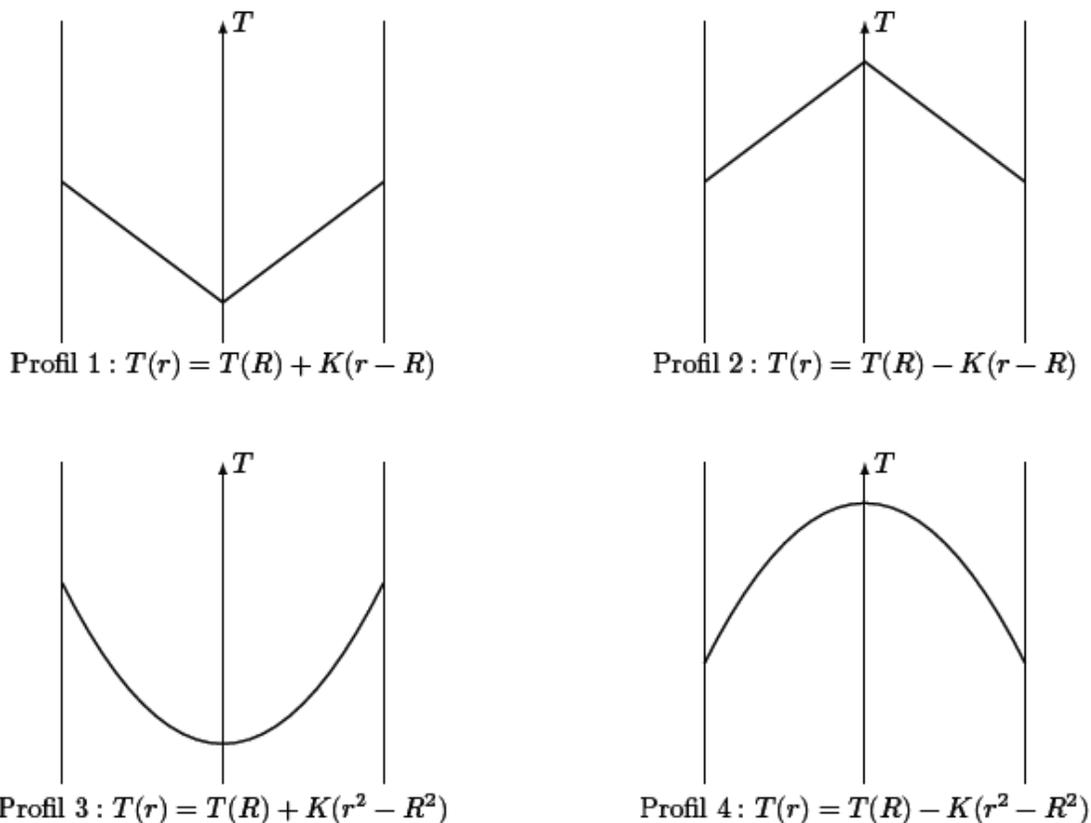


Figure 5

Amélioration du modèle

□ 10 — Pourquoi la température en $r = R$ ne vaut-elle pas exactement la température de l'eau indiquée dans les données?

□ 11 — On donne le coefficient de transfert conducto-convectif pour l'eau $h \approx 5000 \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. À l'aide d'une démarche à préciser, proposer un modèle conduisant à une meilleure estimation de la température au coeur du crayon en tenant compte du constat précédent.

□ 12 — En réalité, la conductivité thermique du dioxyde d'uranium n'est pas indépendante de la température mais possède le profil donné figure 6. Expliquer, de manière qualitative mais argumentée, de quelle manière est modifié le profil de température et, en particulier, si on peut s'attendre à une température plus élevée ou plus basse que celle calculée précédemment.

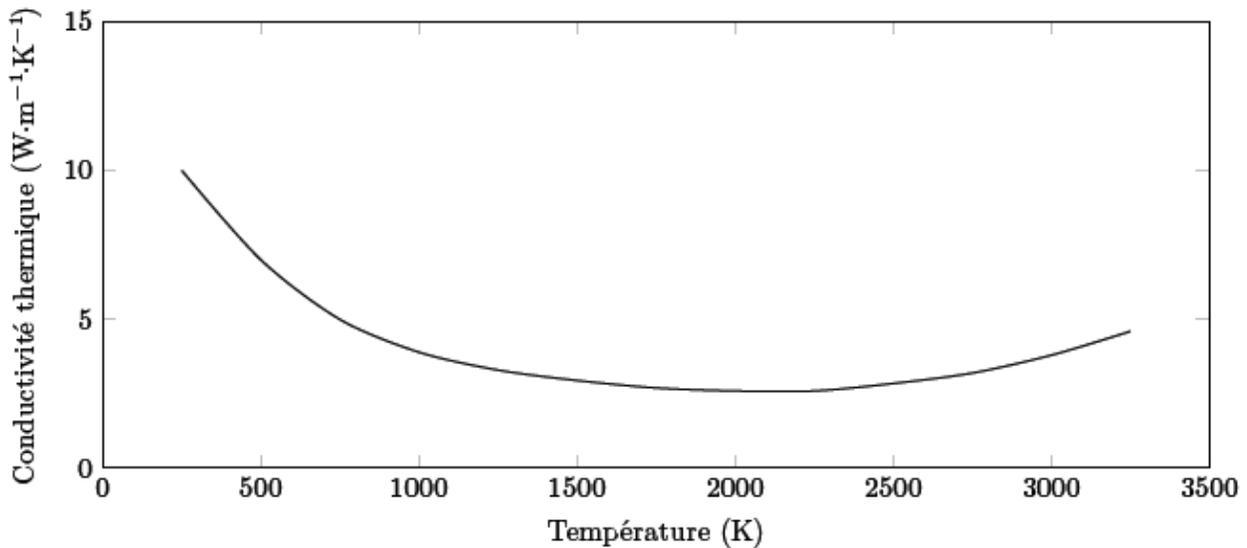


Figure 6

Structure	
réseau assemblage	carré 17×17 crayons
nombre de crayons de combustible	265
diamètre d'un crayon	9,5 mm
épaisseur de la gaine d'un crayon	0,57 mm
nombre d'assemblages	241 par cœur
masse d'UO ₂ par assemblage	600 kg

Circuit primaire	
débit par boucle	27,2 × 10 ³ m ³ ·h ⁻¹
nombre de boucles	4
pression	155 bar
température à l'entrée	296 °C
température au voisinage des crayons	332 °C
température à la sortie	330 °C
surface d'échange	8000 m ²
densité de courant thermique en périphérie d'un crayon (fonctionnement nominal)	157 W·cm ⁻²
puissance linéique (fonctionnement nominal)	470 W·cm ⁻¹
puissance linéique maximale à ne pas dépasser	590 W·cm ⁻¹

Combustible (dioxyde d'uranium)	
conductivité thermique moyenne	5,0 W·m ⁻¹ ·K ⁻¹
température de fusion	2865 °C

III. — Des araignées volantes

Nous proposons d'aborder quelques problèmes de physique relatifs aux araignées et plus particulièrement à l'espèce représentée dans la figure ci-dessous (Fig. 1). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. Les vecteurs sont indiqués par des flèches (\vec{v}) sauf s'ils sont unitaires et sont alors surmontés d'un chapeau ($\|\hat{e}_x\| = 1$). Les nombres complexes sont soulignés à l'exception de j tel que $j^2 = -1$. Un formulaire est fourni en fin d'énoncé.

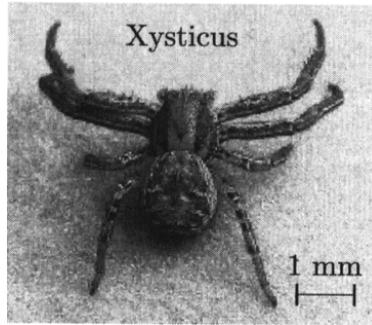


FIGURE 1 – *Xysticus* sp. est une araignée-crabe volante. Source : Wikipédia.

Certaines araignées volantes dont la taille est comprise entre 2 et 7 mm parviennent, en tirant profit des forces électrostatiques, à décoller et à s'envoler. Elles arrivent ainsi à parcourir, au gré des vents, des distances considérables (plusieurs centaines de kilomètres) comme l'a observé pour la première fois, Charles Darwin, lors de son grand voyage à bord du *Beagle* de 1831 à 1836. Dans cette partie du problème, nous nous intéressons à la physique permettant d'expliquer un tel phénomène.

□ 1 — En utilisant une schématisation sphérique rudimentaire pour modéliser ces araignées, estimer un ordre de grandeur m_g pour leur masse.

Par temps clair, le champ électrique, en tout point de la surface de la Terre est radial uniforme, dirigé vers le centre de la Terre et sa valeur moyenne vaut $E_0 = 120 \text{ V m}^{-1}$. En première approximation on assimile localement l'atmosphère terrestre à un condensateur plan dont les deux armatures sont le sol terrestre et la couche de l'ionosphère située à l'altitude $z_0 = 60 \text{ km}$ de celui-ci.

□ 2 — Évaluer la valeur de la densité surfacique moyenne de charge au niveau du sol, notée σ . Des mesures ont permis de montrer qu'il existe une différence de 360 kV entre l'ionosphère et le sol. Que pouvez vous conclure quant à la validité du modèle électrique atmosphérique proposé ?

Les araignées volantes positionnent leurs corps de manière à prendre le vent, en éjectant vers le ciel des fils de soie, qui grâce aux courants d'air et au champ électrique leur permettent de s'élever. Darwin nota que ces araignées décollent en présence au niveau du sol de légers courants d'air ascendants ayant des vitesses U de l'ordre de $0,1 \text{ m s}^{-1}$ et que le nombre de fils fabriqués par celles-ci peut atteindre quelques dizaines.

On peut montrer que les forces hydrodynamiques sont insuffisantes pour permettre à elles seules de faire s'élever les araignées.

Darwin remarqua que les différents fils tissés par une même araignée s'écartent en éventail du fait d'une répulsion électrostatique. Pour corroborer cette hypothèse, on modélise chaque fil de soie comme un fil rigide isolant, de longueur L que l'on supposera inextensible dans un premier temps, possédant en son extrémité libre, une charge q . Ces charges placées dans le champ électrique terrestre interagissent entre elles. On suppose qu'il y a $2n$ fils et que les charges correspondantes se répartissent régulièrement sur le cercle formant la base d'un cône d'angle α en son sommet S (lequel correspond à l'extrémité commune des soies) avec la verticale (Fig. 2).

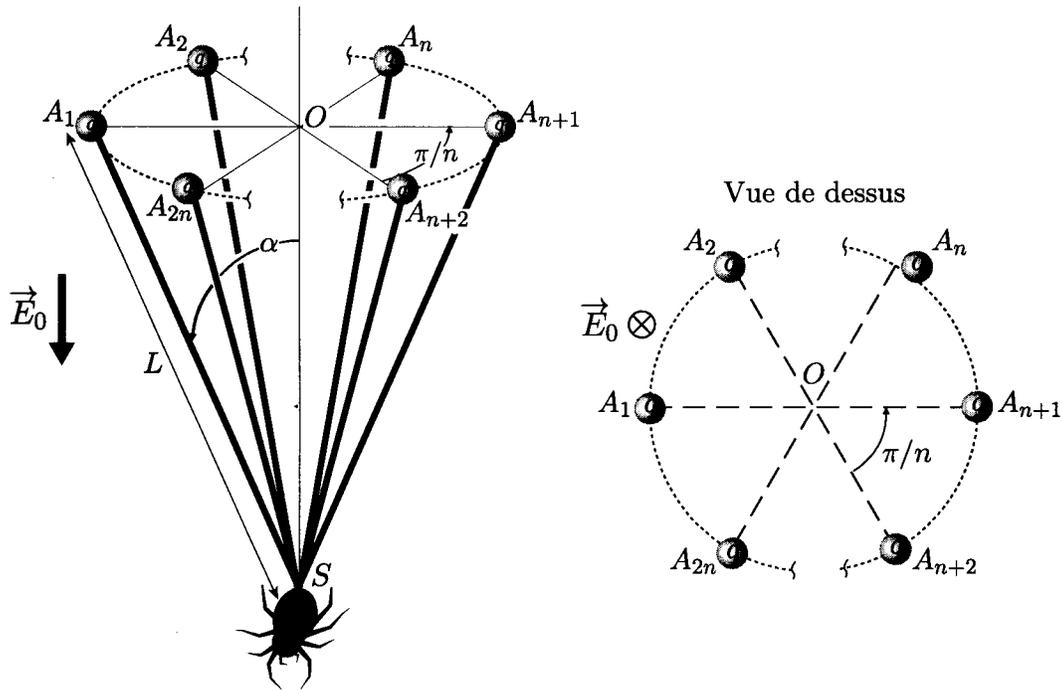


FIGURE 2 – Représentation schématique d’une araignée prête à décoller.

□ 3 — Montrer que le potentiel électrique créé sur une charge par les $2n - 1$ autres charges s’exprime comme :

$$V = \frac{q}{p\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} G(n) \text{ avec } G(n) - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}$$

On précisera la valeur de l’entier p . On pourra éventuellement considérer les points diamétralement opposés A_k et A_{k+n} avec $1 \leq k \leq n$.

□ 4 — L’énergie d’interaction électrostatique du système total constitué des $2n$ charges en l’absence de champ électrique extérieur est égal à :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

où V_i est le potentiel créé par sur la charge i par les $2n - 1$ autres charges.

S’il n’est soumis qu’à ce potentiel, quelle est alors la forme de l’éventail à l’équilibre ?

□ 5 — On étudie le mouvement de cet éventail autour de sa position d’équilibre en supposant qu’à l’instant t tous les fils forment le même angle $\alpha(t)$ avec la verticale. On simplifie le système en considérant, d’une part, que la masse m de chaque fil est ponctuelle, située en leur milieu et, d’autre part, on néglige l’énergie potentielle de pesanteur et celle de déformation élastique devant l’électrostatique. On suppose finalement que S est fixe.

Déterminer l’équation différentielle régissant ce mouvement. Discuter la stabilité de l’équilibre et établir l’expression de la période T , du mouvement au voisinage de la position d’équilibre en fonction de ϵ_0 , m , L , q et $G(n)$.

□ 6 — Déterminer l’expression de l’énergie électrostatique du système lorsque celui-ci est maintenant immergé dans le champ électrique terrestre \vec{E}_0 existant au niveau du sol ainsi que l’équation permettant de

déterminer la valeur de l'angle α à l'équilibre. Expliquer qualitativement comment varie l'ouverture d'équilibre de l'éventail en fonction respectivement de q , n , L et E_0 . On observe un angle $\alpha = 30^\circ$ pour un éventail constitué de $2n = 6$ soies longues de 1 mètre. Que vaut alors la charge q ? On donne $G(3) \approx 38/(3\sqrt{3})$.

□ 7 — Calculer la norme de la force électrique s'exerçant sur l'araignée au niveau du sol pour une charge dont le module est de l'ordre du nanocoulomb. Par temps clair et uniquement par la force électrique, combien de fils sont-ils nécessaires pour soulever les plus petites araignées? Commenter ce résultat.

En réalité, lorsqu'elles décollent, les araignées sont situées sur des zones où le champ électrique est bien plus important que dans les conditions normales du fait d'un phénomène connu sous le nom d'effet de pointe. On retrouve ces conditions au sommet des arbres ou du mât du Beagle comme dans l'expérience de Darwin.

Pour appréhender un tel effet, on considère un conducteur plan infini dans lequel un endroit possède la forme d'un coin obtus ou aigu (Fig 3.) dont le sommet O forme l'origine d'un repère de coordonnées polaires. La région de l'espace pour laquelle $0 < \theta < \varphi$ est l'air assimilé au vide ne contenant aucune charge libre.

Les conditions aux limites sont $V(r, 0) = V(r, \varphi) = V_0$.

On note $V(M)$ le potentiel électrique en un point M de l'espace.

□ 8 — Déterminer l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $V(r, \theta)$ dans cette région.

Vérifier que $V(r, \theta) = \tilde{V} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\omega_n} \sin(\omega_n \theta)$ est bien solution. Dans cette relation, \tilde{V} et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des constantes que l'on ne cherchera pas à déterminer. On précisera par contre l'expression de ω_n en fonction de φ et de l'entier positif n .

□ 9 — En ne considérant que le terme $n = 1$ qui s'avère prépondérant, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$.

En déduire une condition sur φ pour laquelle $\|\vec{E}(M)\|$ peut devenir très important si $M \rightarrow O$.

Formulaire

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

Opérateur divergence en coordonnées cylindriques :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Opérateur laplacien :

$$\Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}}(f))$$

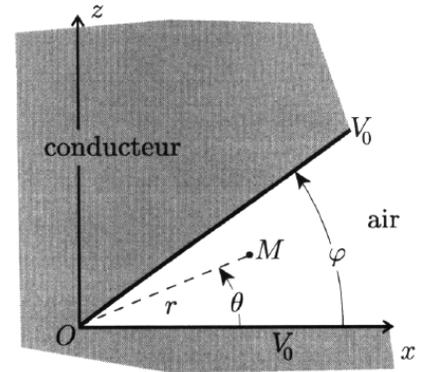


FIGURE 3 – Modèle de coin.

Rayon terrestre	$R_t = 6400 \text{ km}$
Permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F m}^{-1}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$