

DS n°4

PSI 2022/2023

Durée 4 heures - Calculatrices **autorisées**

I. — Décantation dans le traitement des eaux.

I.A. — Décantation statique

□ 1 — On considère le système {une particule polluante}. Le bilan des actions mécaniques extérieurs (BAME) donne : le poids \vec{P} , la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, la force de frottement \vec{f} . En appliquant le principe fondamentale de la dynamique (PFD), on obtient :

$$m\vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}$$

La projection du PFD sur un axe vertical descendant donne :

$$m \frac{dv}{dt}(t) = mg - \rho_e V g - 6\pi\eta r v(t) \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt}(t) + \frac{6\pi\eta r}{m} v(t) = g}$$

Le temps caractéristique d'établissement de la vitesse limite est $\tau_c = \frac{m}{6\pi\eta r} = \frac{2\rho_0 r^2}{9\eta}$. La vitesse limite vaut

$v_\ell = \frac{2r^2 g}{9\eta} \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_0}\right)$. Elle est positive, ce qui traduit le fait que la particule se dépose au fond du bassin et ne flotte pas.

□ 2 — \vec{j} est un flux de particules par unité de surface. Son unité est le $m^{-2}.s^{-1}$. Pour des particules se déplaçant toutes à la même vitesse, on a simplement $\boxed{\vec{j} = n(z)\vec{v}_\ell}$.

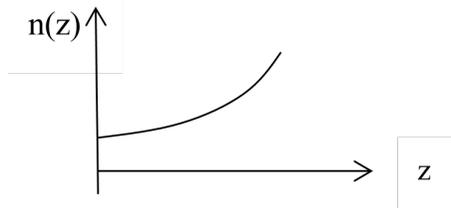
En plus du courant précédent, on observe l'existence d'un second courant qui résulte d'un phénomène de diffusion. On note D le coefficient de diffusivité des particules dans l'eau et $\vec{j}_D = j_D(z) \cdot \vec{e}_z$ le vecteur densité de courant de particules associé à ce second courant.

□ 3 — La loi de Fick s'écrit : $\boxed{\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(z)}$. \vec{j}_D s'exprime en $m^{-2}.s^{-1}$, D s'exprime en $m^2.s^{-1}$ et $n(z)$ s'exprime en m^{-3} . Ce courant de diffusion provient du mouvement aléatoire des particules dû à l'agitation thermique. Comme la densité de particules est plus élevée en bas qu'en haut du bassin, ce courant est ascendant.

□ 4 — En régime permanent, ces deux courants se compensent :

$$\vec{j}_D + \vec{j} = \vec{0} \Leftrightarrow -D \frac{dn}{dz}(z) + n(z)v_\ell = 0$$

La solution de cette dernière équation s'écrit : $\boxed{n(z) = n_0 \exp \frac{v_\ell z}{D}}$.



□ 5 — Considérons une tranche d'eau polluée non décantée de profondeur d_b , de largeur dx et de largeur ℓ . Cette tranche contient $N = N_0 \ell dx d_b$ particules. Une tranche d'eau décantée contient le même nombre de particules avec cette fois $N = \ell dx \int_0^{d_b} n(z) dz$. On a donc :

$$N_0 = \frac{1}{d_b} \int_0^{d_b} n(z) dz \Rightarrow n_0 = \frac{N_0 d_b v \ell}{D(e^{-\frac{v \ell d_b}{D}} - 1)}$$

□ 6 — Le temps caractéristique de sédimentation correspond au temps que met une particule pour atteindre le fond du bassin. Il vaut : $\tau_S = \frac{d_b}{v \ell}$, Le temps caractéristique est obtenu à partir de l'équation de

diffusion : $\tau_D = \frac{d_b^2}{D}$.

□ 7 — En remplaçant dans l'expression précédente, on a :

$$n_0 = N_0 \frac{\tau_D}{\tau_S} \frac{1}{e^{\frac{\tau_D}{\tau_S}} - 1}$$

Pour avoir clarification de l'eau, il suffit que $n_0 \ll N_0$ ce qui implique $\tau_S \ll \tau_D$.

I.B. — Clarification dynamique de l'eau polluée

□ 8 — Le temps de traversée du bassin vaut L_b et de u , un temps de traversée $\tau_T = \frac{L_b}{u}$. Pour une clarification dynamique, il faut que les particules touchent le fond du bassin avant de l'avoir traversé. Soit $\tau_S < \tau_T$.

II. — Le coeur d'un réacteur nucléaire

II.A. — Quelques analyses préliminaires

□ 1 — L'intérêt de produire le combustible sous forme de pastilles au lieu de cylindres est sans doute la facilité de transport et de manipulation (pas facile de manipuler des crayons long de 4 mètres...). L'intérêt de faire une multitude de petits crayons de combustible est d'augmenter la surface d'échange avec l'eau du circuit primaire, pour faciliter les transferts de chaleur et limiter la température atteinte par les cylindres.

□ 2 — Les 24 emplacements restants sont utilisés pour contrôler la réaction grâce à des matériaux absorbeurs de neutrons (le bore notamment), indispensables pour éviter l'emballement de la réaction.

□ 3 — La surface d'échange d'un crayon de hauteur $H = 4$ m et de diamètre $D = 9,5$ mm vaut $S_c = \pi DH$. On a $N = 241 \times 265$ crayons de combustible, donc une surface totale

$S = NS_c = 7,6 \cdot 10^3 \text{ m}^2$. On retrouve l'ordre de grandeur indiqué dans les données.

Modélisation

□ 4 — Le crayon peut être assimilé à un crayon infini étant donné que $H \gg R$. On a alors invariance par rotation autour de (Oz) et par translation selon \vec{u}_z , d'où une dépendance en la seule variable r . Comme $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$, on $\vec{j} = -\frac{dT}{dr} \vec{u}_r$. Le vecteur densité de chaleur est donc radial.

□ 5 — \vec{j} ne peut pas présenter de discontinuité car il y a continuité du flux à l'intérieur de la barre d'uranium. Donc $\frac{dT}{dr}$ non plus : cela exclut les deux premiers profils ; par ailleurs \vec{j} est dirigé vers l'extérieur du crayon, et des températures les plus hautes vers les plus basses. La température est donc maximale au centre du crayon : on a donc le profil 4.

□ 6 — On peut exprimer le vecteur densité de courant thermique : $\vec{j}(r) = 2\lambda K r \vec{u}_r$. Le sujet nous donne par ailleurs la densité de courant thermique en périphérie d'un crayon, on peut donc écrire :

$$K = \frac{j(R)}{2\lambda R} = 3,31.10^7 \text{K.m}^{-2}$$

□ 7 — On effectue un bilan de chaleur sur un crayon entier. En régime stationnaire, la puissance thermique libérée par la réaction nucléaire dans un crayon doit être égale à la puissance thermique sortante du crayon. Chaque crayon a une surface latérale de $\pi D H$ et un volume de $\pi \frac{D^2}{4} H$. En notant σ la puissance volumique produite, on a :

$$\begin{aligned} 0 = -\delta Q_s + \delta Q_p &= -\Phi_{th}(r=R) dt + P dt \Rightarrow P = \Phi_{th}(r=R) \\ &\Rightarrow \sigma \pi \frac{D^2}{4} H = j(R) \pi D H \\ &\Rightarrow \sigma = \frac{4j(R)}{D} = 6,61.10^8 \text{W.m}^{-3} \end{aligned}$$

□ 8 — La puissance linéique est la puissance libérée par unité de longueur de crayon. On peut l'exprimer simplement en fonction de la puissance totale libérée dans un crayon qui vaut $\sigma \pi \frac{D^2}{4} H$ et diviser par la longueur du crayon H . D'où :

$$p_\ell = \sigma \pi \frac{D^2}{4} = j(R) \pi D = 469 \text{W.cm}^{-2}$$

La puissance linéique est étroitement reliée à la température au coeur du crayon (via K) ; une puissance linéique trop importante conduirait à un risque de fusion du coeur du crayon.

□ 9 — On a $T(0) = T(R) + KR^2 = 929^\circ \text{C}$. La température obtenue est inférieure à la température de fusion, ce qui est plutôt rassurant.

Amélioration du modèle

□ 10 — La température n'est pas exactement la même en raison de la présence d'une couche limite d'eau le long du cylindre, dans laquelle la température varie assez rapidement.

□ 11 — La loi de Newton indique que le flux thermique à la surface Uranium-eau vaut : $\Phi_{th} = h(T(R) - T_{eau})S$. Par ailleurs, on peut aussi écrire $\Phi_{th} = j(R)S$. On en déduit donc :

$$T(R) = T_{eau} + \frac{j_{th}(R)}{h} \approx 900^\circ \text{C}$$

On en déduit la nouvelle température dans le coeur :

$$T(0) = T_{eau} + \frac{j_{th}(R)}{h} + KR^2 \approx 1200^\circ C$$

□ 12 — Pour un flux thermique donné, d'après la loi de Fourier, plus la conductivité est grande, plus la dérivée $\frac{dT}{dr}$ est faible (en valeur absolue). Ici, on est à des températures où la conductivité thermique est inférieure à la conductivité thermique indiquée (puisque $T(R) \approx 900$ K), ce qui aura tendance à augmenter la pente $|\frac{dT}{dr}|$ par rapport au modèle, et donc à augmenter la température au centre du crayon.

III. — Des araignées volantes

□ 1 — Modélisons une araignée par une boule de rayon R et de masse volumique ρ , la masse de l'araignée est alors simplement donnée par $m_g = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$. L'énoncé annonce des tailles comprises entre 2 et 7 mm sans préciser si les pattes sont prises en compte, mais d'après l'araignée volante *Xysticus* présente sur la figure 1, on peut supposer que les pattes ne sont pas prises en compte dans la "taille" qui correspondrait ainsi au diamètre de la boule. En considérant une petite araignée, nous prenons $R = 1$ mm, et nous prenons $\rho = \rho_e = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ (masse volumique de l'eau). Pour une petite araignée, on trouve une masse de $5 \cdot 10^{-6}$ kg, pour une grosse il faut multiplier par $(3,5)^3$ ce qui donne environ $2 \cdot 10^{-4}$ kg. Finalement l'ordre de grandeur est $m_g \sim 10^{-5} \text{ kg}$.

□ 2 — Dans le cours, on voit que la norme du champ électrique dans un condensateur plan est donnée par $E_0 = |\sigma|/\epsilon_0$, ce qui donne une densité de charge surfacique $|\sigma| = 1 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$. Par ailleurs, l'énoncé indique que le champ électrique est dirigé vers le centre de la Terre, ce qui signifie que la densité de charge surfacique au niveau du sol est négative, on a donc $\sigma = -1 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$.

En notant $U = 360 \text{ kV}$ la différence de potentiel entre l'ionosphère et le sol, avec le modèle du condensateur plan, on devrait avoir $U = E_0 \times z_0 = 7 \cdot 10^6 \text{ V}$ ce qui est 20 fois supérieur à la valeur mesurée. On peut conclure que le modèle électrique atmosphérique proposé n'est pas satisfaisant.

□ 3 — Nous allons déterminer le potentiel au point A_n (par symétrie, tous les points sont équivalents). La distance OA_n est $R = L \sin \alpha$. Le potentiel créé en A_n par la charge en A_{2n} s'écrit $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R}$. Pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, notons D_k la distance entre les points A_n et A_{n+k} , L'angle $\widehat{A_n O A_{n+k}}$ est égal à $k \times \pi/n$, on a donc $D_k = 2 \times R \sin\left(\frac{k \pi}{n}\right)$. Les points A_{n+k} et A_{n-k} sont tous les deux à la même distance de A_n , ils créent donc le même potentiel en A_k . Le potentiel créé en A_n par toutes les autres charges s'écrit donc

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} + 2 \times \sum_{n=1}^{n-1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{D_k} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2L \sin \alpha} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{k \pi}{n}\right)} \right)$$

Ce qui donne bien l'expression proposée par l'énoncé avec $p = 8$.

□ 4 — En appliquant la formule fournie par l'énoncé, on obtient immédiatement que l'énergie d'interaction électrostatique du système constitué des $2n$ charges s'écrit :

$$E_{p,int} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} qV = \frac{1}{2} \times (2n) \times qV = nqV = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{nG(n)}{L \sin \alpha}$$

Si l'éventail n'est soumis qu'à ce potentiel (pas de champ extérieur appliqué), à l'équilibre, l'énergie potentielle doit être minimale, ce qui est réalisé pour $\sin \alpha = 1$, c'est-à-dire pour $\alpha = \pi/2$. Ce résultat est naturel car des charges identiques se repoussent, elles cherchent donc à s'éloigner le plus possible les unes des autres (tout en respectant les contraintes imposées ici par les fils).

□ 5 — L'énergie mécanique du système s'écrit :

$$E_m = 2n \times \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2} \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{n G(n)}{L \sin \alpha}$$

Nous sommes dans un référentiel supposé galiléen, dans notre modèle il n'y a pas de force dissipative (ni extérieure, ni intérieure au système), le théorème de l'énergie mécanique permet donc d'affirmer que cette énergie est constante. Pour obtenir l'équation du mouvement, dérivons l'intégrale première de l'énergie par rapport au temps, il vient :

$$0 = \frac{dE_m}{dt} = \frac{nmL^2}{2} \dot{\alpha} \ddot{\alpha} - \frac{q^2 n G(n)}{8\pi\epsilon_0 L} \frac{\dot{\alpha} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{\alpha} - \frac{q^2 G(n)}{4\pi\epsilon_0 m L^3} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0}$$

On a bien une position d'équilibre pour $\alpha = \pi/2$. Pour discuter la stabilité de cet équilibre, considérons que le système s'écarte légèrement de cette position d'équilibre, on pose donc $\varepsilon = \alpha - \pi/2$. Au voisinage de la position d'équilibre, on a $\sin \alpha = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ et $\cos \alpha = -\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, ainsi, à l'ordre 1 en ε , l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega_0^2 \alpha(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{q^2 G(n)}{4\pi\epsilon_0 m L^3}$$

En effet, on a toujours $G(n) > 0$, on obtient donc l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique et on peut conclure que la position d'équilibre $\alpha = \pi/2$ est stable (ce qui est assez évident car, comme on l'a dit plus haut, les charges se repoussent et les fils agissent comme des contraintes qui limitent le mouvement des charges).

La période des petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre est :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m L^3}{q^2 G(n)}}$$

□ 6 — En présence d'un champ extérieur, l'énergie électrostatique du système est constituée de deux termes :
— l'énergie potentielle d'interaction $E_{p,int}$ associée aux forces intérieures (déterminée dans la question 3) ;
— l'énergie potentielle électrostatique $E_{p,ext}$ associée à l'action du champ électrique extérieur appliqué sur les $2n$ charges.

On sait que le champ extérieur est uniforme et qu'il est dirigé vers le sol, en notant z la coordonnée verticale ascendante, on peut donc écrire le potentiel électrostatique associé au champ électrique extérieur sous la forme $V_{ext}(z) = V_0 + E_0 z$ où V_0 est une constante et $E_0 > 0$ est la norme du champ électrique terrestre. On a $E_{p,ext} = 2n q V_{ext}(L \cos \alpha)$, donc l'énergie électrostatique du système s'écrit

$$E_p(\alpha) = \frac{q^2 n G(n)}{8\pi\epsilon_0 L} \frac{1}{\sin \alpha} + 2n q E_0 L \cos \alpha + \text{cte}$$

La valeur de l'angle α correspondant à l'équilibre est obtenue lorsque cette énergie potentielle est minimale.

Remarque : si l'araignée S est sur le sol, il faut que les charges soient **négligables** pour que l'angle d'équilibre α_{eq} soit compris entre 0 et $\pi/2$. On sait en effet que le sol est chargé négativement (le champ est orienté vers le bas donc $\sigma < 0$), il faut avoir une interaction répulsive entre le sol et les charges (on peut aussi le vérifier mathématiquement en dérivant l'énergie potentielle par rapport à α).

Examinons qualitativement l'influence des paramètres q , n , L et E_0 sur l'angle d'équilibre. Pour cela, on peut comparer $|E_{p,int}|$ et $|E_{p,ext}|$ dans les différents cas limites :

- si E_0 devient très grand, alors $|E_{p,ext}|$ va dominer sur $|E_{p,int}|$, l'angle α_{eq} va donc diminuer;
- si L augmente, alors $|E_{p,int}|$ diminue et $|E_{p,ext}|$ augmente, donc à nouveau α_{eq} va diminuer;
- si $|q|$ devient très grand (attention q est négative), alors $|E_{p,int}| \propto q^2$ va dominer sur $|E_{p,ext}| \propto |q|$, donc α_{eq} va augmenter;
- enfin, si n augmente il faut déterminer comment va se comporter $G(n)$: d'une part, plus n est grand, plus il y a de termes dans la somme définissant G , et d'autre part, on rajoute des termes dans lesquels le sinus devient de plus en plus petit, or on somme l'inverse des sinus, cela contribue encore à augmenter la valeur de G . On peut ainsi conjecturer que G va augmenter avec n (ce qui peut se vérifier numériquement avec python). L'angle d'équilibre va donc augmenter avec le nombre de fils.

Dérivons l'énergie potentielle totale par rapport à l'angle pour déterminer la condition d'équilibre :

$$\frac{dE_p}{d\alpha} = -\frac{q^2 n G(n)}{8\pi\epsilon_0 L} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - 2n q E_0 L \sin \alpha$$

Avec $\alpha = 30^\circ$ ($\sin \alpha = 1/2$ et $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$), cette dérivée est nulle lorsque la charge vaut :

$$q = -\frac{16\pi\epsilon_0 E_0 L^2 \sin^3 \alpha}{G(n) \cos \alpha} = -\frac{4\pi\epsilon_0 E_0 L^2}{G(3) \sqrt{3}} \simeq \frac{\frac{4\pi}{36\pi} 10^{-9} \times 120 \times 1^2}{38/3} \simeq 1 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

on trouve une charge de l'ordre du nano-coulomb ce qui semble relativement satisfaisant (très grand devant la charge élémentaire et très petit devant un coulomb), on retrouve d'ailleurs cet ordre de grandeur dans l'énoncé de la question suivante.

□ 7 — La force électrique totale due au champ extérieur doit être supérieure au poids de l'araignée (la somme des forces intérieure n'intervient pas dans la deuxième loi de NEWTON). On doit donc avoir $2n \times qE_0 > m_g g$, le nombre de fils nécessaire est tel que

$$2n > \frac{m_g g}{qE_0} \simeq \frac{5 \cdot 10^{-6} \times 10}{10^{-9} \times 120} \simeq 4 \cdot 10^2$$

L'énoncé indique que le nombre de fils fabriqués peut atteindre quelques dizaines, ce qui est bien inférieur à la valeur obtenue ici (pour la plus petite araignée). On peut en conclure qu'il y a vraisemblablement d'autres phénomènes qui interviennent (comme par exemple l'effet du vent ou l'effet de pointe étudié dans la fin de cette première partie).

□ 8 — Le potentiel électrostatique vérifie l'équation de POISSON. Dans une zone vide de charge, elle se réduit à :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

L'équation en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$0 = \Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$

Pour vérifier que la formule proposée est bien solution, on peut s'intéresser à un seul terme de la somme, l'équation étant linéaire. Considérons :

$$V(r, \theta) = a_n r^{\omega_n} \sin(\omega_n \theta)$$

Son Laplacien vaut :

$$\Delta V = \omega_n^2 r^{\omega_n - 2} \sin(\omega_n \theta) + \omega_n^2 r^{\omega_n - 2} \sin(\omega_n \theta) = 0$$

On a vérifié que la fonction proposée est bien une solution (le terme constante \tilde{V} est aussi solution de l'équation de Laplace).

Pour déterminer les valeurs possibles de ω_n , il faut utiliser les conditions aux limites. Pour tout r positif, on doit avoir $V(r, 0) = V_0$, ce qui donne immédiatement $\tilde{V} = V_0$. De plus, pour tout r positif, $V(r, \varphi) = V_0$, ainsi pour tout n , on doit avoir $\sin(\omega_n \varphi) = 0$, donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega_n \varphi = n\pi$. La relation attendue est

probablement $\omega_n = \frac{n\pi}{\varphi}$.

□ 9 — En ne conservant que le terme d'ordre $n = 1$ comme le suggère l'énoncé, on a

$$V(r, \theta) = V_0 + a_1 r^{\pi/\varphi} \sin(\pi\theta/\varphi) \quad \text{ce qui donne}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta = -a_1 \frac{\pi}{\varphi} r^{\pi/\varphi-1} [\sin(\pi\theta/\varphi) \hat{e}_r + \cos(\pi\theta/\varphi) \hat{e}_\theta]$$

La norme du champ électrique devient très importante quand $r \rightarrow 0$, si $\pi/\varphi - 1 < 0$, c'est-à-dire si $\varphi > \pi$ (tout en restant inférieur à 2π). On retrouve « l'effet de pointe » évoqué par l'énoncé : lorsque $\pi < \varphi < 2\pi$, le conducteur (complémentaire du coin) forme un angle $\alpha = 2\pi - \varphi$ qui est compris entre 0 et π , le conducteur a alors une forme de « pointe » et la norme du champ peut devenir très importante au voisinage de la pointe (ce qui peut favoriser l'envol des araignées).