CORRECTION DM n°4

PSI 2022/2023

I Chauffage de l'eau

1) On suppose dans cette partie que l'oeuf n'absorbe aucune chaleur provenant de l'air du cuiseur. Le système {cuiseur+eau} est donc supposé isolé. L'application du premier principe à ce système pendant la durée Δt_1 donne :

$$\Delta H = (m_0 + m_c)c(T_{eb} - T_0) = \mathcal{P}\Delta t_1 \Rightarrow \boxed{\Delta t_1 = \frac{(m_0 + m_c)c(T_{eb} - T_0)}{\mathcal{P}}}$$

2) L'application numérique donne $\boxed{m_c = 32\text{g}}$.

II Détermination de la durée de cuisson Δt_2

II.1 Mécanisme de la cuisson des œufs

1) La raison de l'existence de la pique n'est malheureusement pas à chercher dans l'énoncé, qui omet de citer dans la description de l'oeuf la présence d'une poche d'air : sous l'effet de la chaleur lors de la cuisson, elle tend à se dilater à volume constant, la coquille étant indéformable, ce qui entraîne une augmentation de pression qui peut conduire à la rupture de la coquille. La pique sert à percer la coquille au niveau de la poche à air, pour permettre à celle-ci de se vider au fur et à mesure de l'augmentation de température.

Pour une illustration :

`http://www.arte.tv/magazine/karambolage/fr/lobjet-le-eierpieker-karambolage`

et aussi (avec la présentation d'un autre dispositif)

`http://www.arte.tv/magazine/karambolage/fr/lobjet-le-toqueur-oeuf-061912-000`

En l'absence d'indication de la présence d'une poche d'air, l'énoncé pourrait laisser supposer qu'il s'agit d'un problème de vaporisation de l'eau contenue dans l'oeuf, mais comme la cuisson a lieu à 100°C, la pression de la vapeur formée est de 1 bar, et ne peut donc pas causer la rupture de la coquille.

II.2 Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

1) On réfléchit sur une petit système respectant la symétrie du problème : {une petite coquille de rayon r et d'épaisseur dr} (voir la correction du TD12 pour le schéma correspondant). Le bilan de chaleur sur ce système donne :

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}U) = \delta Q_e - \delta Q_s$$

avec :

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}U) = \mu \mathrm{d}V c\frac{\partial T}{\partial t}(T, r)\mathrm{d}t = 4\pi r^2 \mathrm{d}r \mu c \frac{\partial T}{\partial t}(T, r)\mathrm{d}t$$

le volume du système étant égal à $\mathrm{d}V$ = surface $\times$ épaisseur $= 4\pi r^2 \mathrm{d}r$. et :

$$\delta Q_e = \Phi_{th}(r, t)\mathrm{d}t = j_{th}(r, t)S(r)\mathrm{d}t, \quad \delta Q_s = \Phi_{th,t}(r + \mathrm{d}r)\mathrm{d}t = j_{th}(r + \mathrm{d}r, t)S(r + \mathrm{d}r)\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$4\pi r^2 \mathrm{d}r\mu c\frac{\partial T}{\partial t}(r,t)\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_{\mathrm{th}}(r,t)S(r)}{\partial r}\mathrm{d}r\mathrm{d}t$$
$$4\pi r^2\mu c\frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = \lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial r}(r,t)4\pi r^2\right)$$

en utilisant l'expression de la première composante du gradient en coordonnées sphériques : $\vec{j}_{th} = -\lambda\overrightarrow{\mathrm{grad}}T = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r}(r,t)$. On en déduit l'équation de diffusion en coordonnées sphériques :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = \frac{\lambda}{\mu c r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}(r,t)\right)}$$

2) Le changement de variable conduit à :

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial T}{\partial \tau}(\rho,\tau) = \frac{\lambda}{\mu c r_2^2\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial T}{\partial \rho}(\rho,t)\right)$$

Par identification, on a donc $\boxed{\theta = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda}}$. θ représente le temps caractéristique de diffusion de la chaleur sur la distance r_2. On voit que ce temps ne varie pas linéairement en fonction de r_2 mais quadratiquement. Un oeuf deux fois plus gros mettra donc 4 fois plus de temps à cuire.

II.3 Résolution de l'équation de la chaleur

1) On effectue une séparation des variables :

$$\frac{1}{\rho^2 f(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2 f'(\rho)\right) = \frac{\dot{g}(\tau)}{g(\tau)}$$

Cette équation étant valable $\forall\rho$ et $\forall\tau$, les termes de gauche et de droite sont nécessairement égaux à une constante. Pour éviter toute divergence de la partie temporelle de la solution, cette constante doit nécessairement être strictement négative. On a donc bien : $\frac{\dot{g}(\tau)}{g(\tau)} = -A^2$ dont la solution s'écrit :

$$\boxed{g(\tau) = g_0\mathrm{e}^{-A^2\tau}}$$

2) D'après l'équation de diffusion, on a :

$$\frac{1}{\rho^2 f(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2 f'(\rho)\right) = \frac{1}{\rho F(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho F'(\rho) - F(\rho)\right) = \frac{1}{\rho F(\rho)}\left(F'(\rho) + \rho F''(\rho) - F'(\rho)\right) = \frac{F''(\rho)}{F(\rho)} = -A^2$$

On en déduit :

$$F(\rho) = \alpha\cos(A\rho) + \beta\sin(A\rho)$$

soit :

$$f(\rho) = \frac{\alpha\cos(A\rho) + \beta\sin(A\rho)}{\rho}$$

La non divergence de la température quand $\rho \to 0$ impose nécessairement $\boxed{\alpha = 0}$. D'où :

$$T(\rho,\tau) = T_{\mathrm{eb}} + \beta\frac{\sin(A\rho)}{\rho}\exp(-A^2\tau) \qquad (1)$$

3) On vient de montrer qu'une fonction de la forme (1) est bien solution de l'équation de diffusion. Cette dernière équation étant linéaire, la solution la plus générale s'écrira sous la forme d'une série de fonctions de la forme (1) [1]. Les coefficients β_i et A_i dépendent des conditions initiales (champ des températures initiales dans l'oeuf supposé uniforme) et des conditions aux limites (égalité du flux thermique au niveau de la coquille donné par la loi de Newton).

1. Pour les 5/2 : on utilise un argument similaire pour dire que la solution générale de l'équation d'onde est une somme infinie d'OPPH.

4) Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier

a) D'après la loi de Fourier :

$$\jmath_{\text{th}}(r=r_2) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r}(r=r_2) = -\frac{\lambda}{r_2}\frac{\partial T}{\partial \rho}(\rho=1) = -\frac{\lambda\beta}{r_2}\left(A\cos(A)-\sin(A)\right)\exp\left(-A^2\tau\right)$$

L'égalité des flux donne :

$$-\frac{\lambda\beta}{r_2}\left(A\cos A-\sin A\right)\exp\left(-A^2\tau\right) = \beta h\sin A\exp\left(-A^2\tau\right)$$

qui se simplifie en :

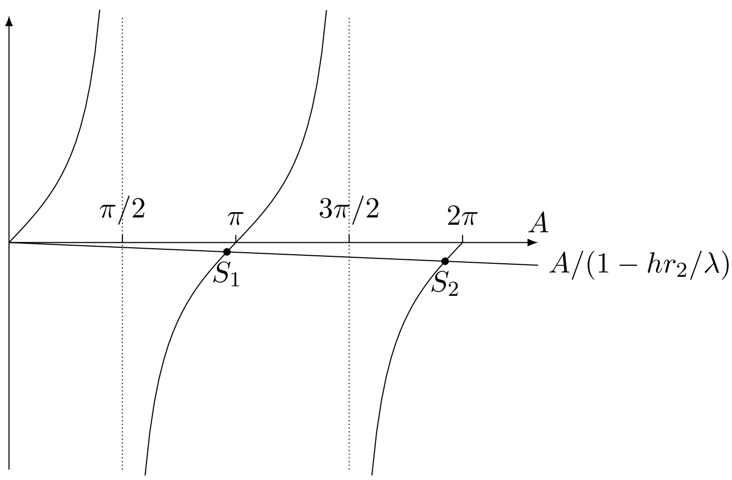
$$A\cos A-\sin A = -\frac{hr_2}{\lambda}\sin A$$

En divisant le tout par $\cos A$, on a bien l'équation demandée.

b) L'équation précédente donne :

$$-\frac{A}{49} = \tan A$$

On peut tracer le terme de gauche et le terme de droite sur un même graphique pour voir les solutions.



recherche graphique des solutions (S_1 et S_2)
de l'équation $\tan A = A/(1-hr_2/\lambda)$

Celles-ci sont de la forme $A \approx k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}$. La première solution non nulle est donc $A\approx\pi$. L'erreur commise est de l'ordre de $-\frac{\pi}{49}\approx -0,064$.

c) On a donc :

$$T(\rho,\tau) = T_{\text{eb}} + \beta\frac{\sin(\pi\rho)}{\rho}\exp(-\pi^2\tau)$$

A la surface, on obtient :

$$T(\rho=1,\tau) = T_{\text{eb}}$$

La température est donc continue à l'interface oeuf-eau. Le flux thermique à la surface de la coquille étant nécessairement non nul, cela revient à considérer le coefficient de Newton h comme infini.

d) On utilisera l'équivalent mathématique (non fourni par l'énoncé) $\frac{\sin x}{x}\sim 1$. On a donc :

$$T(\rho=0,\tau=0) = T_{eb}+\beta\pi = T_0 \Longrightarrow \boxed{\beta = \frac{T_0-T_{eb}}{\pi}}$$

II.4 Calcul de la durée de cuisson Δt_2 pour un œuf dur

1) La durée Δt_2 est telle que :

$$T(\rho = 0, \tau = \frac{\Delta t_2}{\theta}) = T_c$$
$$T_{\text{eb}} + (T_0 - T_{\text{eb}}) \exp\left(-\pi^2 \frac{\Delta t_2}{\theta}\right) = T_c$$
$$\exp\left(-\pi^2 \frac{\Delta t_2}{\theta}\right) = \frac{T_c - T_{\text{eb}}}{T_0 - T_{\text{eb}}} \Leftrightarrow \boxed{\Delta t_2 = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda \pi^2} \ln\left(\frac{T_{\text{eb}} - T_0}{T_{\text{eb}} - T_c}\right)}$$

2) L'application numérique donne $\boxed{\Delta t_2 = 612\text{s} \approx 10\text{min}}$. Cela correspond bien au temps pour cuire un oeuf dur dans de l'eau bouillante.

III Détermination de la masse d'eau à placer dans le cuiseur

1) Détermination approchée de l'énergie de cuisson d'un œuf dur $\mathcal{E}_d$

a) A l'état final, le champ des températures dans l'oeuf est compris entre 85° C (au centre) et 100°C (aux bords). La variation d'énergie interne de l'oeuf est donc nécessairement supérieure à l'énergie nécessaire pour chauffer l'oeuf de manière uniforme jusqu'à 85°C : $\mathcal{E}_{d\,\min} = \frac{4}{3}\pi r_2^3 \mu c (T_c - T_0) = 16,4\text{kJ}$.

b) De la même façon, $\mathcal{E}_{d\,\max} = \frac{4}{3}\pi r_2^3 \mu c (T_{eb} - T_0) = 21,9\text{kJ}$.

c) On obtient $\boxed{\mathcal{E}_d = 19,2\text{kJ}}$, proche de la valeur donnée plus loin dans l'énoncé.

2) On applique le premier principe à l'eau en écoulement en travaillant en unité de puissance. L'eau ne reçoit pas de travail dans le cuiseur. Les puissances thermiques *reçus* par l'eau sont :

- la puissance reçue de la résistance chauffante $\mathcal{P}$;
- la puissance perdue $-\mathcal{P}_f$, où $\mathcal{P}_{\{} > 0$ n'est pas considéré comme une quantité algébrique mais est pris implicitement positif dans le sujet comme le montre l'équation proposée par l'énoncé ;
- la puissance thermique avec les oeufs $-n\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}$. Cette puissance est bien négative car l'énergie cédée par l'eau croît avec le temps.

La variation d'enthalpie massique de l'eau est égale à sa chaleur latente massique d'évaporation. Le bilan s'écrit donc :

$$\boxed{D_m \ell_v = \mathcal{P} - \mathcal{P}_f - n\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}(t)} \tag{2}$$

A noter qu'au vue de la formule donnée dans la question suivante, $\mathcal{P}_f$

3) En intégrant la relation précédente entre 0 et Δt_2 et en reconnaissant que : $\int_0^{\Delta t_2} D_m \mathrm{d}t = \int_0^{\Delta t_2} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t = m(\Delta t_2) = m_0$ et $\int_0^{\Delta t_2} \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \mathcal{E}_X$, on obtient bien la relation demandée.

La masse d'eau m_0 nécessaire à la cuisson de n oeufs diminue avec le nombre d'oeufs. Le paradoxe apparent soulevé dans l'introduction du problème est contenu dans le bilan (2) : plus il y a d'oeufs, plus le transfert thermique entre la vapeur et les oeufs (et donc la liquéfaction d'une partie de cette vapeur) sont importants, ce qui se traduit par un débit de vapeur plus faible en sortie du cuiseur. Le temps de cuisson étant inchangé, la masse d'eau nécessaire est plus faible.

4) On a $\mathcal{P} = m_0 \ell_v + 7\mathcal{E}_d = 222$ W ce qui est bien inférieur à la puissance du cuiseur.

5) La relation $m_0(n)$ est la relation précédente $m_0 = \frac{(\mathcal{P}-\mathcal{P}_f)\Delta t_2}{\ell_v} - \frac{\mathcal{E}_X}{\ell_v} n$. Il s'agit d'une relation affine, ce qui est confirmé par le graphique. Elle est caractérisée par :

- une pente $-\mathcal{E}_X/\ell_v$, qui dépend du type de cuisson par l'intermédiaire de $\mathcal{E}_X$. $\mathcal{E}_X$ augmente quand on passe de la cuisson coque à la cuisson dur, ce qui correspond à une pente de plus en plus importante, caractéristique que l'on retrouve dans les graphiques.

  Pour les oeufs cuits dur, la pente vaut -5,94 g, soit

  $$\mathcal{E}'_d = 13,4\text{kJ}$$

  valeur légèrement inférieure à celle donnée dans l'énoncé ($\mathcal{E}_d = 19$ kJ) pour des oeufs de rayon $r_2 = 2,5$ cm. L'énergie nécessaire à la cuisson est proportionnelle à la masse, donc au volume de l' oeuf, et donc au cube de son rayon. Par conséquent :

  $$\frac{\mathcal{E}'_d}{\mathcal{E}_d} = \left(\frac{r'_2}{r_2}\right)^3 \; ; \; r'_2 = \left(\frac{\mathcal{E}'_d}{\mathcal{E}_d}\right)^{1/3} \times r_2 = 2,2\text{cm}$$

- d'ordonnée à l'origine $\frac{(\mathcal{P}-\mathcal{P}_f)\Delta t_2}{\ell_v}$ fonction du mode de cuisson via Δt_2. Ce temps, donc l'ordonnée à l'origine, augmente lorsqu'on passe d'une cuisson coque à une cuisson dur, ce qui apparaît également sur le graphique. Pour les oeufs cuits dur, on trouve 126 g. En négligeant les pertes ($\mathcal{P}_f \approx 0$, $\mathcal{P} = 350$W) on obtient pour les oeufs cuits dur

  $$\Delta t'_2 = 814s = 13,5\text{min}$$

  Le temps est donc sensiblement plus élevé que la valeur théorique. Ceci n'est pas dû à la taille de l'oeuf utilisé pour le calibrage, puisque celui-ci est plus petit que celui donné en référence dans l'énoncé (il cuit donc plus rapidement). Une partie de l'eau reste sous forme liquide sur les parois du cuiseur et des oeufs en fin de cuisson, donc la masse d'eau nécessaire est supérieure à celle calculée avec l'expression précédente, mais cela ne suffit certainement pas à expliquer l'écart.