Correction TD n°15

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆ Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Equations locales

Membrane cellulaire⋆

1. On a :

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \vec{0} \text{ pour } x \leq 0, \\ -\dfrac{V_0}{a} \exp\left(-\dfrac{x}{a}\right) \vec{u}_x \text{ pour } x > 0 \end{cases}$$

2. L'équation de Poisson est $\Delta V(x) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. On en déduit :

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \leq 0, \\ \dfrac{\varepsilon_0 V_0}{a^2} \exp\left(-\dfrac{x}{a}\right) \text{ pour } x > 0 \end{cases}$$

3. On utilisera la relation de passage (relation de discontinuité de $\vec{E}$ en $x = 0$) :

$$E(0^+) - E(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\sigma = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{a}}$$

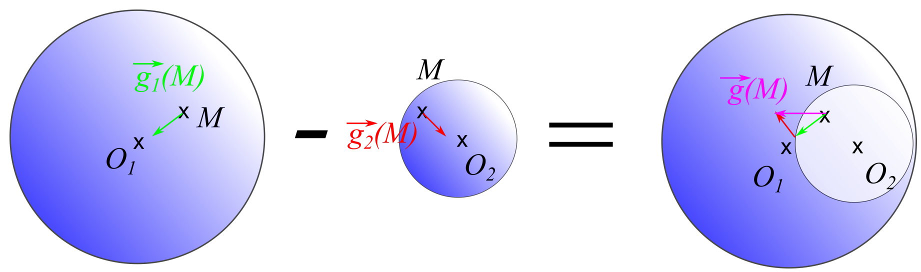
4. Par définition :

$$Q = \iiint \rho(x) \mathrm{d}V = S \int x_0^{\infty} \frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \mathrm{d}x = S \frac{\varepsilon_0 V_0}{a}$$

On trouve $\boxed{Q = -\sigma S}$. La charge localisée sur le plan $x = 0$ est exactement compensée par la charge répartie dans le demi-espace $x > 0$.

Variation du champ gravitationnel à la surface d'une planète⋆

La distribution de masse n'étant pas suffisament symétrique pour utiliser le théorème de Gauss (on a seulement une invariance par rotation autour de l'axe $(O_1 O_2)$) il faut utiliser une astuce. La distribution de masse peut ête vue comme la différence entre une boule pleine de rayon R_1 créant un champ gravitationnel $\vec{g}_1(M)$ et une autre boule pleine de rayon R_2 créant un champ $\vec{g}_2(M)$. D'après le théorème de superposition, le champ gravitationnel total vaut $\vec{g}(M) = \vec{g}_1(M) - \vec{g}_2(M)$.



L'expression des champs $\vec{g}_1(M)$ et $\vec{g}_2(M)$ peut être déterminée à l'aide du théorème de Gauss. Finalement, on aura :

$$\vec{g}(M) = -4\pi G \rho_1 r_1 \vec{u}_{r1} + 4\pi G \rho_1 r_2 \vec{u}_{r2} = 4\pi G \rho_1 (\overrightarrow{O_2 M} - \overrightarrow{O_1 M}) = 4\pi G \rho_1 \overrightarrow{O_2 O_1}$$

On remarque que le champ dans la cavité est uniforme !

Potentiel de Yukawa•

Un exercice très classique mais assez calculatoire. Dans la question 2, on prendra un équivalent pour $r << a_0$ et une limite pour $r >> a_0$. La dernière question fait intervenir des notions de probabilités assez poussées.

1. En utilisant $\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r)\vec{u}_r$, on obtient :

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r a_0}\right) \mathrm{e}^{-\frac{r}{a_0}} \vec{u}_r}$$

2. Dans le cas $r << a_0$, le premier terme entre parenthèse est dominant. Par ailleurs, l'exponentiel est équivalent à 1, d'où :

$$\vec{E}(r) \underset{r<<a_0}{\approx} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Lorsqu'on s'approche du centre, le champ électrique est identique au champ créé par une charge ponctuelle située à l'origine.

Dans le cas $r >> a_0$, le terme entre parenthèse tend vers 0 mais surtout l'exponentiel tend aussi vers 0, on en déduit $\lim\limits_{r>>a_0} \vec{E}(r) = \vec{0}$. Lorsqu'on se place à une distance très grande devant a_0, le champ décroît exponentiellement vers 0

3. Vu la direction et les invariances du champs, on a simplement :

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{a_0}}$$

D'après le théorème de Gauss, la charge contenue dans la boule vaut

$$\boxed{Q(r) = \varepsilon_0 \Phi_E = q\left(1+\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{a_0}}}$$

On note que $\lim\limits_{r\to 0} Q(r) = q$ et $\lim\limits_{r\to\infty} Q(r) = 0$. Ceci est cohérent avec la présence d'une charge ponctuelle $+q$ localisée à l'origine et d'un nuage électronique de rayon "infini" et de charge $-q$.

4. Malheureusement ici, on ne peut utiliser ni l'équation de Maxwell-Gauss ni l'équation de Poisson car on ne connaît pas l'expression de la divergence ou du laplacien en coordonnées sphériques. On raisonne donc sur une coquille de rayon interne r et d'épaisseur dr. La charge dq comprise dans ce volume peut s'exprimer de deux façons :

$$\mathrm{d}q = \rho(r)\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \rho(r)\mathrm{d}r$$

mais aussi :

$$\mathrm{d}q = Q(r+\mathrm{d}r) - Q(r) = Q'(r)\mathrm{d}r$$

On en déduit :

$$\rho(r) = \frac{Q'(r)}{4\pi r^2} \Rightarrow \boxed{\rho(r) = -\frac{q}{4\pi r a_0^2}e^{-\frac{r}{a_0}}}$$

5. On a $P(r) = \frac{\rho(r)}{-e}$. La probabilité $p(r)$ de trouver l'électron à une distance comprise entre r et $r+\mathrm{d}r$ du noyau vaut $p(r) = P(r)\mathrm{d}V = p(r)4\pi r^2\mathrm{d}r$, soit :

$$p(r) = \frac{r}{a_0^2}e^{-\frac{r}{a_0}}\mathrm{d}r$$

Une étude de $f(r) = \frac{r}{a_0^2}e^{-\frac{r}{a_0}}$ montre que $p(r)$ est nulle en $r=0$, maximale en $r = a_0$ et tend vers 0 quand $r\to\infty$. La distance a_0 désigne donc la distance où la probabilité de trouver l'électron est la plus grande. Cette distance représente l'équivalent du rayon atomique (ou rayon de Bohr). Elle est de l'ordre de l'angström soit 10^{-10} m.

Champ crée par un disque au voisinage de son axe•

Un exercice plus difficile mais les questions sur les symétries/invariances peuvent être abordées par tous. Les calculs finaux de champ électriques peuvent se voir comme des exercices de dérivation de fonctions racine. Coquille : il faut lire σ au lieu de λ.

1. Soit un point M situé sur l'axe du disque. Tout plan contenant l'axe (Oz) (et donc le point M) est un plan de symétrie de la distribution de charge. Le champ devant être contenu dans tous ces plans à la fois, il est forcément dirigé suivant $\vec{u}_z$.
2. (a) Soit un point M au voisinage de l'axe. Le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ est un plan de symétrie donc le champ électrique en M est contenu dans ce plan. Donc le champ $\vec{E}$ n'a pas de composante suivant $\vec{u}_\theta$ en M.

   (b) Etant donné qu'il y a invariance par rotation autour de (Oz), la norme de $\vec{E}$ ne dépend pas de θ.

   (c) D'après le théorème de Gauss, le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge intérieure divisée par ε_0. Etant donné que le cylindre ne contient aucune charge, le flux sortant du cylindre est nul : $\Phi_E = 0$. Ce flux se décompose ainsi :

$$\begin{aligned}\Phi_E = 0 &= \Phi_{\text{haut}} + \Phi_{\text{lat}} + \Phi_{\text{bas}}\\ 0 &= E_z(0,z+\mathrm{d}z)\pi r^2 + E_r(r,z)2\pi r\mathrm{d}z - E_z(0,z)\pi r^2\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}z}(0,z)\pi r^2\mathrm{d}z + E_r(r,z)2\pi r\mathrm{d}z\end{aligned}$$

   On en déduit :

$$E_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}z}(0,z)$$

En effectuant la dérivation, on obtient :

$$E_r(r,z) = -\frac{\sigma R r}{4\varepsilon_0}\frac{R^2-2z^2}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

(d) La circulation du champ électrostatique sur un contour fermé étant toujours nulle, on a $\mathscr{C}_{MNPQ}(\vec{E}) = 0$. Cette circulation se décompose ainsi :

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_{MNPQ}(\vec{E}) &= \mathscr{C}_{MN}(\vec{E}) + \mathscr{C}_{NP}(\vec{E}) + \mathscr{C}_{PQ}(\vec{E}) + \mathscr{C}_{QM}(\vec{E})\\ &= E_z(r,z)\mathrm{d}z + E_r(r,z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}r - E_z(r+\mathrm{d}r,z)\mathrm{d}z - E_r(r,z)\mathrm{d}r\\ &= \left(\frac{\partial E_r}{\partial z}(r,z) - \frac{\partial E_z}{\partial r}(r,z)\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}z\end{aligned}$$

On en déduit l'équation demandée. En utilisant le résultat de l'équation précédente, il vient :

$$\frac{\partial E_z}{\partial r}(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}^2E_z}{\mathrm{d}z^2}(0,z)$$

En primitivant cette équation par rapport à r, on obtient :

$$E_z(r,z) = -\frac{r^2}{4}\frac{\mathrm{d}^2E_z}{\mathrm{d}z^2}(0,z) + f(z)$$

Ceci étant vrai en $r = 0$, on a $f(z) = E_z(r,z)$, d'où le résultat demandé.

Pouvoir des pointes•

Un exercice faisant intervenir de la géométrie elliptique. Les deux foyers sont F et F'. La première question peut être intéressante pour s'entraîner à différencier une équation.

1. On a $c^2 = a^2 - b^2$. En différenciant, on obtient : $2c\mathrm{d}c = 2a\mathrm{d}a - 2b\mathrm{d}b$. Or les deux ellipses ayant les même foyers : $c = \text{cste}$ et $\mathrm{d}c = 0$. On a donc $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b} = \frac{b}{a}$. Or $b = \sqrt{a^2-c^2} = a\sqrt{1-e^2}$. On en déduit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b} = \sqrt{1-e^2}}$$

2. La différence de potentielle entre A et A' s'écrit :

$$V(A') - V(A) = \mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{AA'} = -E_A\mathrm{d}a$$

De même, $\mathrm{d}V = -E_B\mathrm{d}b$. On en déduit :

$$\boxed{\frac{E_B}{E_A} = \sqrt{1-e^2} < 1}$$

Le champ est donc plus grand en A où la surface est plus pointue qu'en B où la surface est plus plane.

3. On a $E_A = \frac{E_B}{\sqrt{1-e^2}}$ Plus e s'approche de 1 (surface très pointue), plus le champ électrique au voisinage de A devient grand. Si l'air au voisinage de A contient des ions et si le champ dépasse la valeur du champ disruptif de l'air, ceux-ci vont se déplacer au niveau de la pointe. Il y aura une étincelle.