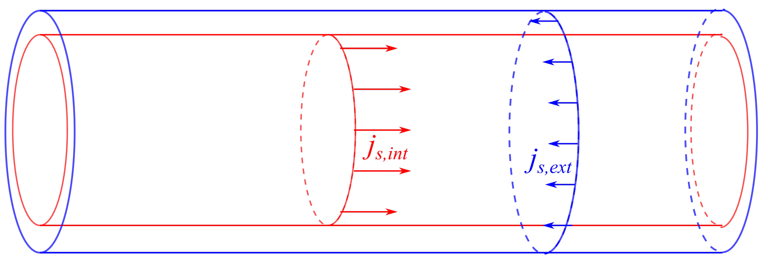
Correction TD n°16

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆ Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Câble coaxial⋆

Attention, les cylindres sont creux.



1. On a $j_{s,int}2\pi a = I$ et $j_{s,ext}2\pi b = -I$. On en déduit :

$$\boxed{j_{s,int} = \frac{I}{2\pi a}} \text{ et } \boxed{j_{s,ext} = -\frac{I}{2\pi b}}$$

2. On se place en coordonnées cylindriques. Pour tout point M, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants. C'est donc un plan d'antisymétrie pour $\vec{B}(M)$. On en déduit $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_\theta$. Il y a invariance par translation suivant (Oz) et par rotation autour de cet axe. Donc $\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta}$. Comme contour, on choisit un cercle de rayon r passant par M. La circulation de $\vec{B}(M)$ sur ce contour vaut :

$$\oint \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = B(r)2\pi r$$

On distingue trois cas :

- $r < a$: $I_{\text{enlacé}} = 0 \Rightarrow \boxed{B(r) = 0}$,
- $a < r < b$: $I_{\text{enlacé}} = I \Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$,
- $b < r$: $I_{\text{enlacé}} = I - I = 0 \Rightarrow \boxed{B(r) = 0}$.

3. A la traversée de la surface, le champ magnétique est <u>discontinu</u>. On note que $B(a^+) - B(a^-) = \mu_0 j_{s,int}$ et $B(b^+) - B(b^-) = \mu_0 j_{s,ext}$. Ceci illustre un résultat très général : en présence de courants surfacique, le champ magnétique subit une discontinuité valant $\mu_0 j_s$.

Champ magnétique⋆

Le champ $\vec{B}(M)$ étant dirigé suivant $\vec{u}_\theta$ et ne dépendant que de r, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie pour $\vec{B}(M)$ et un plan d'antisymétrie pour les courants. On a donc $\vec{j}(M) = j(M)\vec{u}_z$. Par ailleurs, le champ magnétique étant invariant par rotation autour de (Oz) et par translation suivant (Oz), $j(M) = j(r)$. On en déduit :

$$\vec{j}(M) = j(r)\vec{u}_z$$

Pour déterminer $j(r)$, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ projetée sur $\vec{u}_z$:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rB(r))}{\mathrm{d}r} = \mu_0 j(r)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} j(r) & = \frac{3B_0}{\mu_0}\frac{r}{a^2} \text{ pour } r < a \\ j(r) & = -\frac{B_0}{\mu_0}\frac{a^2}{r^3} \text{ pour } r > a \end{cases}$$