

TD n°17 Equations de Maxwell. Induction

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

- ★ Exercice niveau CCP
- Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
- ◇ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Equations de Maxwell

1.1 Décharge d'un conducteur dans l'air★

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon R uniformément chargée et abandonnée dans l'air avec une charge initiale q_0 se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est faiblement conducteur, de conductivité γ : la densité de charge y est nulle et la densité de courant y est fournie par la loi d'Ohm locale :

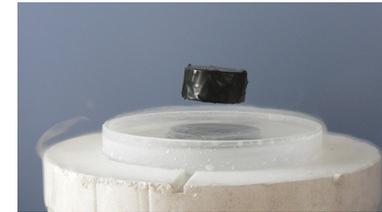
$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

L'origine de l'espace étant prise au centre O de la boule, on adopte des coordonnées sphériques de centre O et on cherche un champ électromagnétique de la forme

1. Etudier les symétries et les invariances du champ électrique et du champ magnétique.
2. Déterminer $E(r,t)$ en fonction de $q(t)$ pour $r > R$.
3. Déterminer l'expression de $q(t)$ en fonction du temps.
4. Pourquoi les expériences d'électrostatique sont-elles plus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide ?

1.2 Effet Meissner et supraconducteur●

En 1935, les frères London décrivent théoriquement l'effet Meissner, donnant l'évolution du champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur (dont la permittivité ϵ_0 et la perméabilité μ_0 sont celles du vide). L'une des conséquences les plus spectaculaires de cet effet est la lévitation d'un aimant au-dessus d'un supraconducteur :



Lorsque le matériau est dans sa phase supraconductrice et qu'il est soumis à un champ magnétique \vec{B} , des courants \vec{j} apparaissent. Soient \vec{v} la vitesse instantanée des porteurs de charges associés à ces courants, m leur masse, q leur charge électrique et n leur densité volumique (nombre par unité de volume). On notera $\vec{E}(M,t)$ le champ électrique à l'intérieur du supraconducteur.

1. (a) À partir de l'équation du mouvement d'un porteur de charge, considéré comme n'étant soumis qu'à la seule action du champ électrique, montrer que $\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$, où l'on exprimera λ en fonction de m, n, q et μ_0 .
 - (b) Montrer que λ est une longueur.
 - (c) Calculer λ pour l'aluminium. Données : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $n = 1,8 \cdot 10^{29}$ m⁻³, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹.
2. Dans toute la suite, on se place dans le cadre de l'ARQS magnétique. Le matériau est localement neutre ($\rho = 0$ en tout point). À partir des équations de Maxwell, montrer que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} \right) = \vec{0}$$

où $\vec{\Delta}$ est le laplacien vectoriel. On utilisera le fait que $\vec{\text{rot rot}} = \vec{\text{grad div}} - \vec{\Delta}$.

3. On admet qu'on a en réalité :

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}$$

Dans toute la suite, on considère le cas d'une plaque supraconductrice infinie dans les directions x et y , occupant le demi-espace $z > 0$, l'origine O étant choisie sur la surface de la plaque. On applique le champ $\vec{B} = B_0\vec{e}_x$ uniforme à l'extérieur du matériau et on cherche un champ de la forme $\vec{B} = B_0\vec{e}_x$ dans le matériau.

(a) Déterminer $B(z)$ à partir de l'équation différentielle précédente, les courants étant considérés comme répartis dans le volume du matériau (pas de courant surfacique). On donne :

$$\vec{\Delta}\vec{B} = \begin{pmatrix} \Delta B_x \\ \Delta B_y \\ \Delta B_z \end{pmatrix}$$

où Δ est l'opérateur laplacien habituel.

(b) Tracer l'allure du graphe $B(z)$ et commenter.

1.3 Champ électromagnétique dans un condensateur

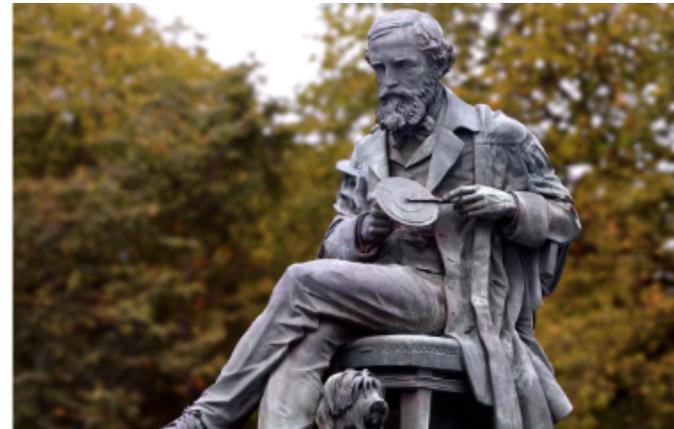
Un condensateur plan est constitué par des armatures métalliques circulaires de rayon R et de même axe $\Delta = z'z$, séparées d'une hauteur h . Ce condensateur est soumis à une tension alternative donnée, de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$, qui produit à l'instant t dans l'espace vide entre les armatures un champ uniforme, sinusoïdal dans le temps et parallèle à l'axe Δ , qu'on écrit en notation complexe : $\vec{E}_0(t) = E_0 \exp(i\omega t)\vec{u}_z$



On adoptera une approche perturbative pour évaluer le champ électromagnétique : au champ électrique \vec{E}_0 est associé un champ magnétique \vec{B}_1 , lequel induit un champ électrique \vec{E}_2 , qui crée à son tour un champ magnétique \vec{B}_3 .

1. Les variations dans le temps du champ électrique \vec{E}_0 créent un champ magnétique $\vec{B}_1(M, t)$. En un point M entre les plaques, donner l'équation de Maxwell relative à ce phénomène et relier $\vec{E}_0, \vec{B}_1, \omega$ et c .
2. On se place dans les coordonnées cylindriques et, vu les symétries, on cherche $\vec{B}_1(M, t) = B_1(r, t)\vec{u}_\theta$. Déterminer l'expression de $\vec{B}_1(M, t)$ en fonction de $c, X = \frac{r\omega}{c}, E_0$ et ωt .
3. Les variations dans le temps du champ magnétique $\vec{B}_1(M, t)$ créent un champ électrique $\vec{E}_2(M, t)$. Quelle relation de Maxwell représente ce phénomène ? En déduire l'expression de $\vec{E}_2(M, t)$ en fonction de X et E_0 en prenant $E_2(0, t) = 0$
4. Expliquer comment obtenir le terme suivant $\vec{E}_4(M, t)$ pour le champ électrique.

1.4 Résolution de problème : monopôles magnétiques



Modifier les équations de Maxwell afin de les rendre compatible avec l'existence de monopôles magnétiques.

On pourra s'aider du tableau de compétences suivant :

Compétences	
Analyser	— Traduire l'existence de monopôles magnétique par l'existence de charges magnétiques
	— Postuler la conservation de la charge magnétique
Réaliser	— Écrire les équations de Maxwell
	— Vérifier la cohérence des équations avec la conservation de la charge magnétique
	— Modifier les équations le cas échéant
Valider	— Constater le parallèle entre la nouvelle équation de Maxwell Faraday avec l'équation de Maxwell Ampère.

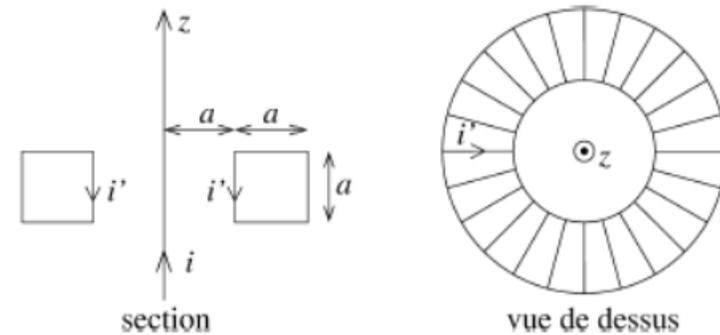
2. Induction

2.1 Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique est un appareil permettant de mesurer des intensités de grande valeur sans avoir à insérer un ampèremètre dans le circuit.



La pince est modélisée par un tore de section carrée de côté $a = 5$ cm, d'axe (Oz) sur lequel on a bobiné régulièrement un grand nombre $N = 10^4$ de spires carrées de côté a en série. Ceci forme un circuit de résistance $R = 0,2W$, fermé sur un ampèremètre de résistance $r_0 = 0,3W$. Le tore encercle un fil infini confondu avec l'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I \cos \omega t$ de fréquence $f = 50$ Hz. C'est I qu'on souhaite mesurer.



1. En régime permanent, le circuit de la pince ampèremétrique est parcouru par un courant $i'(t) = I' \cos(\omega t + \varphi')$. Expliquer l'existence de ce courant.
2. Soit \vec{B} le champ magnétique total, créé par le fil et la pince.

- (a) Justifier que $\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$
- (b) En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer $B(r, z)$ en un point M situé dans la section d'une spire carrée du tore.
- (c) En déduire le flux magnétique total Φ à travers les N spires.
- (d) Montrer qu'on a :

$$\frac{I'}{I} = \frac{1}{\sqrt{N^2 + \left(\frac{2\pi(r'+R)}{N\mu_0\omega a \ln 2}\right)^2}}$$

En utilisant les valeurs numériques, justifier la simplification $\frac{I'}{I} \approx \frac{1}{N}$.

- (e) En quoi cet appareil permet-il de mesurer I ?

2.2 Table à induction*

Le chauffage du fond métallique (plaque circulaire) des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen des courants de Foucault induits par un champ magnétique variable. Logé dans une table en céramique, un bobinage inducteur alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire. Dans le domaine de la cuisson, il s'agit de créer une forte dissipation par effet Joule dans le fond des récipients tout en limitant au plus bas l'échauffement de l'inducteur. Pour atteindre cet objectif, il faut faire un choix judicieux quant au métal à chauffer. Nous allons comparer les propriétés d'un fond en acier amagnétique à celui d'un fond en acier

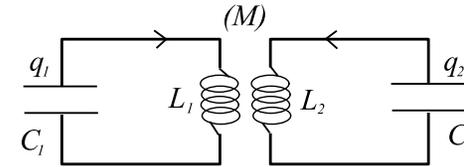
magnétique.

1. L'inducteur est un bobinage de 20 spires dont la résistance totale est $R_1 = 1,80 \cdot 10^{-2} \text{ W}$. Pour mesurer son inductance propre L_1 on l'alimente sans poser le récipient de cuisson, sous une tension efficace de 24 V à la fréquence de 25 kHz. On mesure alors un courant efficace de 5,1 A. Exprimer L_1 en fonction des données et exprimer sa valeur numérique.
2. L'induit, c'est-à-dire la plaque circulaire constituant le fond métallique du récipient de cuisson, a un rayon de 10 cm et une épaisseur de 1 cm. Lorsqu'elle est en acier magnétique, sa résistance est $R_2 = 8,26 \cdot 10^{-2} \text{ W}$ et son inductance propre est $L_2 = 0,24 \mu\text{H}$. Montrer que l'on pourra négliger R_2^2 devant $(L_2 \omega)^2$ avec une erreur inférieure à 5%.
3. L'inducteur est alimenté sous une tension $v_1(t)$. Sachant que l'ensemble inducteur-induit se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle inductance M :
 - (a) Écrire sans approximation les équations temporelles de couplage entre le courant $i_1(t)$ circulant dans l'inducteur et $i_2(t)$ circulant dans la plaque.
 - (b) En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\frac{I_2}{I_1}$.
 - (c) En déduire l'expression littérale de l'impédance complexe $\underline{Z} = \frac{V_1}{I_1}$ associée à l'inducteur.
 - (d) Simplifier les expressions ci-dessus puis effectuer le calcul numérique de leurs modules, sachant que la mutuelle est estimée à $2 \mu\text{H}$.
4. Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 W. Quelle est alors la valeur efficace du courant maximal admissible dans l'inducteur ? En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, de l'intensité du courant dans la plaque et de la puissance de chauffe développée dans celle-ci.

2.3 Circuits couplés•

Un circuit LC série oscille naturellement à la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Cette pulsation est modifiée lorsqu'on approche un autre circuit LC , identique au premier, mais dans une configuration telle que les deux circuits deviennent couplés par mutuelle induction.

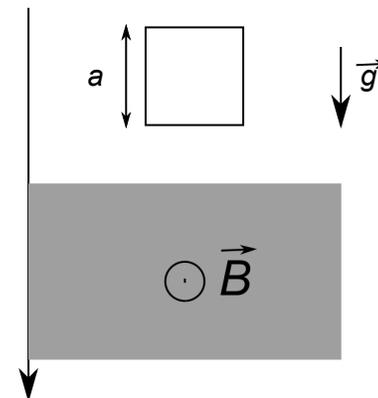
Dans le circuit suivant, le condensateur de capacité C_1 est chargé sous la tension u_0 à la date $t = 0$ où l'on ferme l'interrupteur K . On prendra dans toute la suite $C_1 = C_2 = C$ et $L_1 = L_2 = L$.



1. Que signifie pour les lignes de champ magnétique, que les circuits soient couplés par mutuelle induction ?
2. Etablir deux équations différentielles couplées sur les tensions $u_{C1}(t)$ et $u_{C2}(t)$ aux bornes des condensateurs.
3. Découpler ces équations en formant les équations sur les fonctions $\sigma(t) = u_{C1}(t) + u_{C2}(t)$ et différence $\delta(t) = u_{C1}(t) - u_{C2}(t)$. Les intégrer et en déduire les expressions des tensions aux bornes des condensateurs. On utilisera les formules de sommation des cosinus. On pourra poser $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}$.
4. Si $M \ll L$, comparer ω_1 et ω_2 . Quelle est l'allure du graphe de u_{C1} ? Comment s'appelle le phénomène observé ? En déduire une méthode qui permette de mesurer expérimentalement le rapport M/L à l'oscilloscope, avec les mesures des périodes des phénomènes.

2.4 Cadre qui chute dans un champ localisé

Un cadre conducteur, constitué de 4 segments de longueur a , tombe dans le plan du schéma sous l'effet de la gravité. Sa résistance électrique est notée R .



L'espace est divisé en deux régions :

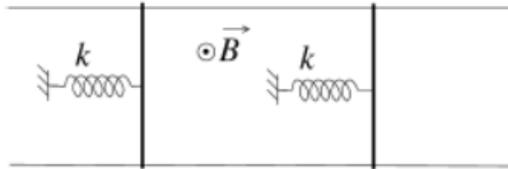
- pour $x < 0$, il n'y a pas de champ magnétique,
- pour $x > 0$, un champ magnétique est présent. Il est uniforme, stationnaire et orthogonal au plan du schéma.

Etablir l'expression de la vitesse $v(t)$ du cadre lorsque :

1. le cadre est entièrement dans la région où $\vec{B} = \vec{0}$,
2. le cadre est à cheval sur les régions où $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{B} \neq \vec{0}$,
3. le cadre est entièrement dans la région où $\vec{B} \neq \vec{0}$.

2.5 Deux tiges reliées par des ressorts*

Deux barreaux identiques de masse m , parallèles, sont reliés par leurs milieux à deux ressorts identiques de raideur k . Les deux ressorts sont attachés au point O . Les barreaux glissent sans frottement sur deux rails parallèles, horizontaux, distants d'une longueur a . Le tout est plongé dans un champ magnétostatique uniforme orthogonal au plan formé par les rails et les barreaux.



La résistance électrique du circuit filiforme ainsi créé est R , constante quelles que soient les positions des barreaux. De plus, l'auto-inductance du circuit sera négligée. Soient M_1 et M_2 les points d'attache entre les barreaux et les ressorts. On repère la position des barreaux par $x_1(t)$ et $x_2(t)$, distance entre M_1 , ou M_2 , et leur position à vide, où les ressorts ont leur longueur propre.

A l'instant initial, les vitesses des barreaux sont nulles, M_1 est écarté d'une distance b par rapport à sa position au repos et M_2 est au repos.

1. Expliquer physiquement ce qu'on observe.
2. Comment s'exprime la surface du cadre en fonction de a , $x_2(t)$ et $x_1(t)$? En déduire l'expression du flux du champ magnétique. En déduire l'équation électrique du circuit.
3. Exprimer les deux équations mécaniques (une pour chaque barreau).

4. Déterminer les deux équations découplées vérifiées par les variables :

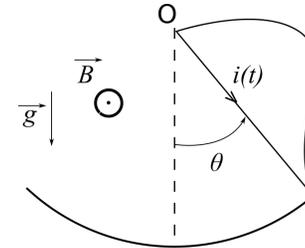
$$\sigma(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\delta(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

5. Dresser et interpréter un bilan énergétique.

2.6 Pendule magnétique•

Une barre conductrice, de longueur a , est mobile sur un fil conducteur circulaire. Le circuit est fermé par un fil électrique. La résistance électrique de la barre est R , les résistances des autres éléments du circuit sont négligeables devant R . On ne tiendra pas compte des phénomènes d'auto-induction. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$.



La barre, de longueur a , tourne autour de (Oz) sans frottement. Son moment d'inertie par rapport à Oz vaut J . La barre est lâchée en $t = 0$ de la position $\theta_0 > 0$ avec une vitesse nulle.

1. Etablir puis linéariser l'équation différentielle sur $\theta(t)$. Préciser la pulsation caractéristique ω_0 et le facteur d'amortissement ξ .
2. Mener un bilan énergétique. Le commenter en faisant clairement apparaître les énergies cinétiques et potentielle de la tige.