

# Correction TD n°17

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

## Résumé

- ★ Exercice niveau CCP
- Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
- ◇ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

## Décharge d'un conducteur dans l'air★

- Soit un point  $M$  quelconque. Tous les plans contenant  $O$  et  $M$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Donc le champ électrique est contenu dans tous ces plans à la fois. On en déduit que  $\vec{E}(M, t) = E(M, t)\vec{u}_r$ . Par ailleurs, il y a invariance par rotation autour du point  $O$ , donc  $\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{u}_r$ . D'après la loi d'Ohm, le vecteur densité de courant est aussi dirigé suivant  $\vec{u}_r$ . Cela signifie que tous les plans contenant  $O$  et  $M$  sont aussi des plans de symétries des courants. Donc le champ magnétique est perpendiculaire à tous ces plans à la fois. Ceci n'est possible que si  $\vec{B}(M) = \vec{0}$ .

- L'application du théorème de Gauss, toujours valable en régime variable, donne :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

- Utilisons l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{0} = \vec{j}(r, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(r, t) \iff 0 = \frac{\gamma q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \epsilon_0 \frac{\dot{q}(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

soit :

$$\dot{q}(t) + \frac{\gamma}{\epsilon_0} q(t) = 0 \implies q(t) = q_0 e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$$

## Effet Meissner et supraconducteur●

- (a) "Equation du mouvement" en physique signifie toujours "équation différentielle obtenue à partir du PFD, du TEC ou du TMC". On considère ici un porteur de charge. Il n'est soumis qu'à la force électrique (on néglige le poids). On obtient :

$$m \frac{dv}{dt}(t) = q\vec{E} \implies \vec{E} = \frac{m}{q} \frac{dv}{dt}(t) = \frac{m}{nq^2} \frac{\partial j}{\partial t}(t)$$

car  $\vec{j} = nq\vec{v}$ . On en déduit  $\lambda^2 = \frac{m}{nq^2\mu_0}$ .

- (b) L'analyse dimensionnelle donne :

$$[\lambda^2] = \frac{M}{L^{-3} \cdot A^2 T^2 [H] \cdot L^{-1}}$$

sachant que le sujet indique  $[\mu_0] = [H] \cdot L^{-1}$ . Pour trouver la dimension d'un Henry, on peut utiliser le fait que  $\frac{1}{2}Li^2$  est une énergie, soit  $[H] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot A^{-2}$ . On en déduit :

$$[\lambda^2] = \frac{M}{L^{-4} \cdot A^2 T^2 M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot A^{-2}} = L^2$$

- (c)  $\lambda = 12,5 \text{ nm}$ .

- On va se servir des équations de Maxwell. On cherche à faire apparaître le laplacien de  $\vec{B}$ , en partant de la formule fournie par l'énoncé :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$$

car  $\text{div}\vec{B} = 0$ . En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, on a par ailleurs :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = \mu_0 \vec{\text{rot}}\vec{j} = -\Delta\vec{B}$$

Soit en dérivant par rapport au temps, en supposant que l'on peut bien intervertir les opérateurs :

$$\mu_0 \vec{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\Delta\vec{B}) \iff \mu_0 \vec{\text{rot}} \left( \frac{\vec{E}}{\mu_0 \lambda^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\Delta\vec{B})$$

$$-\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\Delta\vec{B})$$

d'où l'équation demandée.

3. (a) L'équation admise a pour forme de solution :

$$B(z) = Ae^{\frac{z}{\lambda}} + Ce^{-\frac{z}{\lambda}}$$

D'après l'énoncé, il n'y a pas de courants surfaciques, donc le champ magnétique est continu à l'interface (cf. TD magnétostatique). On a ainsi  $B(z=0) = B_0$ . D'autre part le champ magnétique ne peut diverger lorsque  $z \rightarrow \infty$ , ce qui impose  $A = 0$ . On en déduit  $C = B_0$  ainsi :

$$B(z) = B_0 e^{-\frac{z}{\lambda}}$$

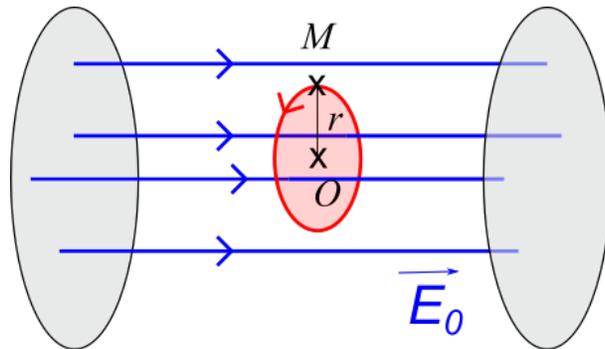
- (b) L'allure est exponentiellement décroissante : au bout de quelques  $\lambda$ , le champ magnétique s'annule complètement dans la plaque supraconductrice. Cette dernière repousse le champ, et pourra permettre la lévitation de tels matériaux au-dessus d'un aimant.

### Champ électromagnétique dans un condensateur

1. C'est l'équation de Maxwell-Ampère (terme de courant de déplacement). On a :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}_1 = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$$

2. Etant donné que  $\vec{B}_1(M, t)$  est dirigé suivant  $\vec{u}_\theta$ , on choisit comme contour fermé un cercle centré sur l'axe Oz.



L'intégration de cette équation sur le contour donne :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}_1 \cdot \vec{OM} = j \frac{\omega}{c^2} \Phi_{E_0}$$

On en déduit :

$$B_1(r, t) 2\pi r = j \frac{\omega}{c^2} E_0(t) \pi r^2$$

soit :

$$\vec{B}_1(r, t) = j \frac{X}{c} E_0(t) \vec{u}_\theta$$

3. Il s'agit cette fois de l'équation de Maxwell-Faraday qui donne :

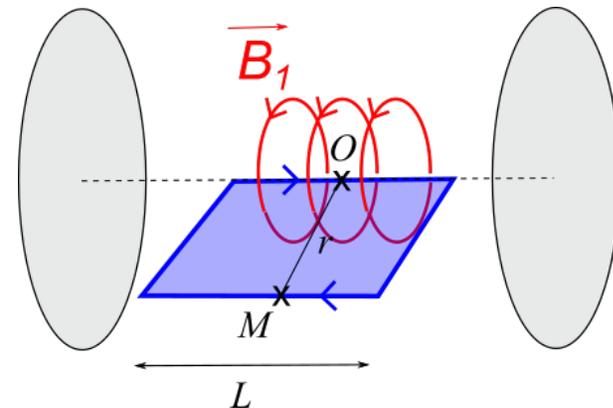
$$\vec{\text{rot}} \vec{E}_2 = -j\omega \vec{B}_1$$

qui s'intègre en :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_2 \cdot \vec{OM} = -j\omega \Phi_{B_1}$$

En négligeant les effets de bords, on pourra supposer que  $\vec{E}_2(M, t)$  est toujours dirigé suivant  $\vec{u}_z$ .

On choisit comme contour fermé un rectangle de largeur  $r$  et de longueur  $L$ .



On en déduit :

$$E(0, t)L - E(r, t)L = -j\omega L \int_0^r j \frac{r\omega}{2c^2} E_0(t) dr = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} LE_0(t)$$

En prenant  $E_2(0, t) = 0$ , on en déduit :

$$\vec{E}_2(r, t) = -X^2 \vec{E}_0(t)$$

4. Si on développe cette approche, on peut en déduire que :

$$\vec{E}_4(r, t) = -X^2 \vec{E}_2(r, t) = X^4 \vec{E}_0(r, t)$$

On en déduit le champ électrique total dans le condensateur :

$$\vec{E}(r,t) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X^{2n} \right) \vec{E}_0(r,t)$$

Si  $X < 1$  (par exemple si on est dans l'ARQS), on pourra réécrire :

$$\vec{E}(r,t) = \frac{1}{1+X^2} \vec{E}_0(r,t)$$

Si  $X > 1$ , la série diverge. Cela ne veut pas dire que le champ électrique est infini mais que l'approche perturbative utilisée ici n'est pas valide.

### Résolution de problème : monopôles magnétiques

**Analyser** Les monopôles magnétiques seraient des particules de type "pôle Nord" ou "pôle Sud". Au voisinage d'un de ces pôles, la divergence du champ magnétique serait positive pour un pôle Nord et négative pour un pôle Sud. Si la polarité magnétique était une propriété fondamentale de la matière au même titre que la charge, elle serait probablement conservée.

**Réaliser** Notons  $\rho_M$  la densité volumique de charges magnétiques. Le courant associé vaut donc  $\vec{j}_M = \rho_M \vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse des monopôles. L'homogénéité nous invite à postuler la nouvelle équation de Maxwell-flux :

$$\text{div} \vec{B}(M,t) = \mu_0 c \rho_M(M,t)$$

La conservation de la polarité magnétique s'écrirait :

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t}(M,t) + \text{div} \vec{j}_M(M,t) = 0$$

En utilisant l'équation de Maxwell-flux, on aurait :

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t}(M,t) = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{B}(M,t) = \frac{1}{\mu_0 c} \text{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t)$$

Si on laissait l'équation de Maxwell-Faraday inchangée, on trouverait :

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t}(M,t) = -\frac{1}{\mu_0 c} \text{div}(\text{rot} \vec{E}(M,t)) = \vec{0}$$

car la divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Il nous faut donc ajouter un terme pour être en accord avec la conservation de la polarité magnétique :

$$\text{rot} \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t) - \frac{1}{\epsilon_0 c} \vec{j}_M(M,t)$$

On trouve alors :

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t}(M,t) = \frac{1}{\mu_0 c} \text{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t) = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 c^2} \text{div} \vec{j}_M(M,t) = -\text{div} \vec{j}_M(M,t)$$

### Pince ampèremétrique•

- Le fil étant parcouru par un courant d'intensité variable, il génère un champ magnétique variable orthoradial. Son flux à travers le tore est donc variable, ce qui crée bien dans un circuit fermé un courant électrique, de même fréquence que le courant  $i$ .
- Soit  $\vec{B}$  le champ magnétique total, créé par le fil et la pince.
  - Invariance par rotation d'angle  $\theta$ , mais pas par translation selon (Oz) si on tient compte du champ créé par la pince également. Le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie pour la distribution de courant, donc  $\vec{B} = B(r,z)\vec{e}_\theta$ .
  - Le théorème d'Ampère donne :

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{udOM} = \mu_0(i - Ni') \Leftrightarrow B(r,z) = \frac{\mu_0(i - Ni')}{2\pi r}$$

- Attention, le champ  $\vec{B}$  n'est pas uniforme sur la spire, il faut donc calculer l'intégrale de surface :

$$\Phi_B = N \int_{r=a}^{2a} \int_{z=0}^a B(r,z) dr dz = Na \frac{\mu_0(i - Ni')}{2\pi} \ln 2$$

- On applique la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = Na \frac{\mu_0}{2\pi} \ln 2 \frac{d}{dt}(i - Ni')$$

Dans le tore, la loi des Mailles s'écrit :

$$e(t) = (R + r')i' \Leftrightarrow Na \frac{\mu_0}{2\pi} \ln 2 \frac{d}{dt}(i - Ni') = (R + r')i'$$

En passant en complexe, on obtient bien la relation :

$$\frac{I'}{I} = \frac{1}{\sqrt{N^2 + \left(\frac{2\pi(r'+R)}{N\mu_0\omega a \ln 2}\right)^2}}$$

Sachant que  $\frac{2\pi(r'+R)}{\mu_0 Na \omega \ln 2} = 23 \ll N$ , on a bien  $\frac{I'}{I} \approx \frac{1}{N}$ .

(e) L'ampèremètre branché à la pince permet donc de mesurer l'intensité efficace de  $i'(t)$ , elle-même reliée à  $I$ . Ce dispositif est donc efficace lorsqu'il est nécessaire de mesurer des intensités importantes, du fait du facteur d'atténuation de  $N = 10^4$ . L'absence de contact électrique entre les deux circuits permet en plus une mesure en toute sécurité. L'inconvénient principal est qu'on ne peut pas mesurer avec cette méthode un courant continu (absence d'induction). Par ailleurs, la méthode est moins intéressante si le courant  $I$  est trop petit. Dans ce cas,  $I'$  risque d'être trop faible pour être mesuré avec précision à l'ampèremètre.

### Circuits couplés par mutuelle

1. Les lignes de champs magnétiques créées par les bobine 1 et 2 traversent les deux bobines.

2.

$$\begin{cases} u_1(t) &= -LC \frac{d^2 u_1}{dt^2}(t) - MC \frac{d^2 u_2}{dt^2}(t) \\ u_2(t) &= -LC \frac{d^2 u_2}{dt^2}(t) - MC \frac{d^2 u_1}{dt^2}(t) \end{cases}$$

3. En sommant et en soustrayant les deux équations précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \sigma}{dt^2}(t) + \omega_+^2 \sigma(t) &= 0 \\ \frac{d^2 \delta}{dt^2}(t) + \omega_-^2 \delta(t) &= 0 \end{cases}$$

avec  $\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}$  et  $\omega_- = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}$ . Les solutions de ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma(t) &= A_+ \cos(\omega_+ t) + B_+ \sin(\omega_+ t) \\ \delta(t) &= A_- \cos(\omega_- t) + B_- \sin(\omega_- t) \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes, on utilise les conditions initiales. Ici, on a :  $u_1(t) = u_0, u_2(t) = 0, i_1(t) = 0, i_2(t) = 0$ . Ceci implique :

$$\begin{cases} \sigma(t) &= u_0 \\ \delta(t) &= u_0 \\ \frac{d\sigma}{dt} &= 0 \\ \frac{d\delta}{dt} &= 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \sigma(t) &= u_0 \cos(\omega_+ t) \\ \delta(t) &= u_0 \cos(\omega_- t) \end{cases}$$

En revenant aux variables initiales  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ , on obtient :

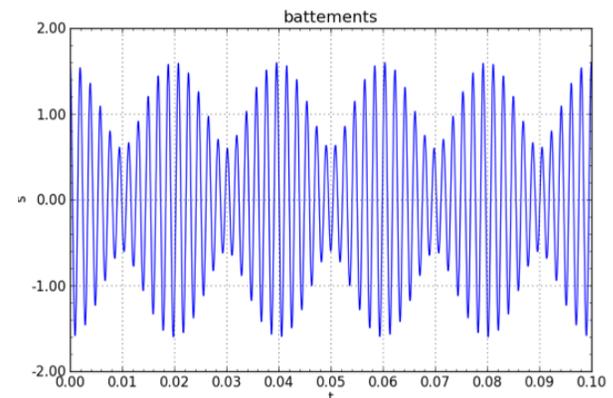
$$\begin{cases} u_1(t) &= \frac{1}{2}(\sigma(t) + \delta(t)) = u_0 \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t\right) \\ u_2(t) &= \frac{1}{2}(\sigma(t) - \delta(t)) = -u_0 \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t\right) \end{cases}$$

4. Si  $M \ll L$ , alors  $\omega_+ \approx \omega_- \approx \omega_0$ . Autrement dit,  $\omega_+ + \omega_- \approx 2\omega_0$  et  $\omega_+ - \omega_- = \Delta\omega \ll \omega_0$ .

L'expression de  $u_1(t)$  se simplifie en :

$$u_1(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

On obtient le produit d'un cosinus "rapide" (oscillant à  $\omega_0$ ) par un cosinus "lent" (oscillant à  $\Delta\omega$ ). La courbe de  $u_1(t)$  est une courbe de battements !



En déterminant la période des battements et la période des oscillations rapides, on peut revenir à la valeur de  $\Delta\omega$  et en déduire le rapport  $\frac{M}{L}$  (il faut effectuer un développement limité en  $\frac{M}{L}$ ).

### Cadre qui chute dans un champ localisé

1. Dans la première région, le champ magnétique est nul. Le cadre n'est soumis qu'à la gravité. Le PFD donne :

$$m \frac{dv}{dt}(t) = g$$

Le mouvement est uniformément accéléré.

2. Dans cette région, le cadre est en partie traversé par le champ magnétique. Si on note  $z(t)$  le montant inférieur du cadre, le flux du champ magnétique à travers le cadre vaut :

$$\Phi_B(t) = Baz(t)$$

D'après la loi de Faraday, il apparaît une f.é.m induite valant :

$$e(t) = -Bav(t)$$

. Le cadre possédant une résistance  $R$  (on néglige son autoinductance  $L$ ), la loi des mailles dans le cadre s'écrit :

$$e(t) = Ri(t) \Rightarrow \boxed{-Bav(t) = Ri(t) \quad (\text{EE})}$$

A cause du courant  $i(t)$ , une force de Laplace s'exerce sur la partie du cadre plongée dans le champ magnétique. Les forces s'exerçant sur les deux montants latéraux se compensent. Il ne reste que la force exercée sur le montant bas (le montant haut n'est pas plongé dans le champ). En orientant  $i(t)$  dans le sens du tire-bouchon, on a :

$$\boxed{m \frac{dv}{dt}(t) = i(t)aB + g \quad (\text{EM})}$$

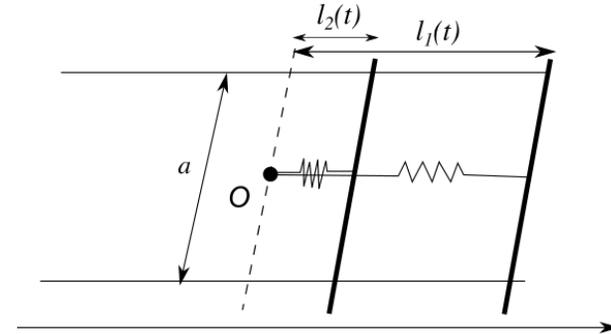
En découplant les équations, on obtient :

$$m \frac{dv}{dt}(t) = -\frac{B^2 a^2}{R} v(t) + g$$

On a une équation similaire à la chute libre avec frottements. La force de Laplace est assimilable à une force de freinage (principe du freinage par induction).

3. Dans la dernière région, le cadre est totalement traversé par le champ  $\Phi_B = Ba^2$ . Le flux étant constant, il n'y a plus de f.é.m induite, plus de courant induit et plus de force de Laplace. le cadre reprend un mouvement uniformément accéléré.

### Deux tiges reliées par des ressorts



- Lorsqu'on lâche  $M_1$ , le flux du champ magnétique à travers le circuit formé de  $M_1$ ,  $M_2$  et des deux rails varie. Cette variation du flux entraîne la création d'une f.é.m induite qui à son tour génère un courant dans le circuit. La barre  $M_2$  étant traversée par un courant et plongée dans un champ magnétique, elle sera soumise à une force de Laplace qui va s'opposer à la variation du flux créée par le mouvement de  $M_1$ .
- Notons  $\ell_0$  la longueur à vide des deux ressorts. La surface du circuit vaut :

$$S(t) = a(\ell_1(t) + \ell_2(t))$$

La f.é.m induite vaut donc :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}(t) = -aB(\dot{\ell}_1(t) - \dot{\ell}_2(t)) = -aB(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t))$$

L'équation électrique du circuit est :

$$\boxed{-aB(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) = Ri(t) \quad (\text{EE})}$$

- On applique le PFD pour chaque barre :

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) &= -kx_1(t) + i(t)aB \\ m\ddot{x}_2(t) &= -kx_2(t) - i(t)aB \end{cases} \quad (\text{EM})}$$

- On somme et on soustrait les deux équations précédentes. On obtient alors :

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)) &= -k(x_1(t) + x_2(t)) \\ m(\ddot{x}_1(t) - \ddot{x}_2(t)) &= -k(x_1(t) - x_2(t)) - 2\frac{a^2 B^2}{R}(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) \end{cases}$$

ce qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} m\ddot{\sigma}(t) + k\sigma(t) & = 0 \\ m\ddot{\delta}(t) + 2\frac{a^2B^2}{R}\dot{\delta}(t) + k\delta(t) & = 0 \end{cases}$$

La variable  $\sigma(t)$  représente la position du centre de masse des deux barres. La variable  $\delta(t)$  représente la distance entre les deux barres.

On voit que  $\sigma(t)$  vérifie une équation d'oscillateur harmonique, alors que  $\delta(t)$  vérifie une équation d'oscillateur harmonique amorti de facteur d'amortissement  $\xi = \frac{a^2B^2}{R\sqrt{mk}}$ . En supposant que  $\xi < 1$ , on aura :

$$\begin{cases} \sigma(t) & = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \delta(t) & = B e^{-\omega_0 \xi t} \cos(\Omega t + \psi) \end{cases}$$

où  $A, B, \varphi$  et  $\psi$  sont à déterminer avec les conditions initiales.

avec  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ . Les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} \sigma(t=0) & = \delta(t=0) = b \\ \dot{\sigma}(t=0) & = \dot{\delta}(t=0) = 0 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement  $A = C \cos \varphi = b$  et  $B = 0$ . En dérivant la dernière expression, on obtient :  $\varphi = \arctan\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ .

La position des deux barres est finalement donnée par :

$$\begin{cases} x_1(t) & = \frac{1}{2}(\sigma(t) + \delta(t)) \\ x_2(t) & = \frac{1}{2}(\sigma(t) - \delta(t)) \end{cases}$$

5. Pour obtenir un bilan énergétique, on multiplie l'équation électrique par  $i(t)$ , et les deux équations mécaniques par  $\dot{x}_1(t)$  et  $\dot{x}_2(t)$ . On en déduit :

$$\begin{cases} -aBi(t)(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) & = Ri^2(t) \\ m\dot{x}_1(t)\ddot{x}_1(t) & = -kx_1(t)\dot{x}_1(t) + i(t)aB\dot{x}_1(t) \\ m\dot{x}_2(t)\ddot{x}_2(t) & = -kx_2(t)\dot{x}_2(t) - i(t)aB\dot{x}_2(t) \end{cases}$$

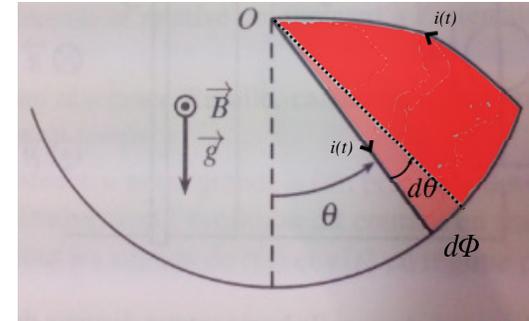
En sommant les deux dernières équations et en substituant le terme de couplage, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2(t) + \frac{1}{2} k x_1^2(t) + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2(t) + \frac{1}{2} k x_2^2(t) \right) = -Ri^2(t)$$

Le terme de gauche représente la variation de l'énergie mécanique des deux barres. Le terme de droite correspond à la puissance électrique dissipée dans le circuit par effet Joule.

### Pendule magnétique•

- Lorsqu'on lâche la barre, le flux magnétique à travers le circuit varie. Il apparaît donc une f.é.m induite et un courant électrique induit  $i(t)$  dans la barre. La barre est alors soumise à une force de Laplace qui s'oppose à la variation du flux. Les oscillations de la barre seront donc amorties.



Soyons plus quantitatif. Lorsque l'angle  $\theta$  que fait la barre avec la verticale augmente de  $d\theta$ , le flux magnétique à travers le circuit varie de  $d\Phi = -\frac{Ba^2 d\theta}{2}$ . La f.é.m induite dans le circuit vaut donc :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}(t) = \frac{Ba^2}{2} \dot{\theta}(t)$$

et le courant induit vaut :

$$i(t) = \frac{Ba^2}{2R} \dot{\theta}(t) \quad (\text{EE})$$

La force de Laplace infinitésimale agissant sur une section infinitésimale de la barre a pour expression :

$$d\vec{F}_L(t) = i(t) dr \vec{u}_r \wedge B \vec{u}_z = -i(t) dr B \vec{u}_\theta$$

Le moment infinitésimal de cette force par rapport au point O vaut :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_L) = \int_0^a r \vec{u}_r \wedge d\vec{F}_L(t) = -i(t) \frac{a^2 B}{2} \vec{u}_z$$

Remarque : on fera attention à bien voir que :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_L) \neq a \vec{u}_r \wedge \vec{F}_L(t)$$

Le moment du poids par rapport au point O vaut :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \frac{a}{2} \vec{u}_r \wedge \vec{P} = -mg \frac{a}{2} \sin \theta \vec{u}_z$$

Le théorème du moment cinétique nous dit que :

$$\boxed{J \ddot{\theta}(t) = -mg \frac{a}{2} \sin \theta(t) - i(t) \frac{a^2 B}{2} \quad (\text{EM})}$$

En substituant  $i(t)$ , on reconnaît aux petits angles une équation d'oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{a^4 B^2 \dot{\theta}}{4RJ} + \frac{mga}{2J} \theta(t) = 0$$

2. Pour obtenir un bilan énergétique, on multiplie le TMC par  $\dot{\theta}(t)$  et on intègre :

$$J \ddot{\theta}(t) \dot{\theta}(t) = -mg \frac{a}{2} \sin \theta(t) \dot{\theta}(t) - \frac{a^4 B^2 \dot{\theta}^2}{4R}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2(t) - mg \frac{a}{2} \cos \theta(t) \right) = - \frac{a^4 B^2 \dot{\theta}^2}{4R}$$

Le terme de gauche représente l'énergie mécanique de la barre (énergie cinétique+énergie potentielle). Le terme de droite représente la puissance de la force de Laplace, assimilable ici à une force de frottement fluide.