

# Correction DS n°5 (Niveau moyen)

PSI 2022/2023

## Problème 1 : Etude d'un transducteur électrodynamique (Mines-Ponts)

La figure 1 représente un plan de coupe d'un haut-parleur passant par son axe de symétrie de révolution noté  $x'x$ .

Le haut parleur comporte une bobine mobile comprenant  $N$  spires parcourues par un courant d'intensité  $i(t)$  non représenté sur la figure 1, susceptible de se translater le long de l'axe  $x'x$ . Elle est reliée à une membrane, à symétrie de révolution autour de  $x'x$ , partant du cache noyau jusqu'à la suspension externe, qu'elle entraîne dans son mouvement.

Un châssis rigide, le saladier, maintient l'équipage mobile (bobine, membrane et cache noyau) par l'intermédiaire du spider (en matériau souple) et de la suspension externe qui assurent un mouvement de cet équipage centré sur l'axe  $x'x$ .

La bobine est insérée dans l'entrefer d'un circuit magnétique (en matériau ferromagnétique de haute perméabilité parfois nommé culasse du haut-parleur), comportant un aimant permanent en forme de tore qui permet de générer un champ magnétique dans l'entrefer.

La présence du champ magnétique et de la bobine permet de réaliser un actionneur électromagnétique et d'obtenir dans certaines conditions un mouvement d'oscillations de l'équipage mobile autour de sa position d'équilibre, ce qui, grâce à la présence de la membrane, génère une onde acoustique.

Les vecteurs seront notés avec une flèche ( $\vec{B}$ ), sauf s'ils sont unitaires et seront alors affublés d'un chapeau ( $\|\hat{u}_x\| = 1$ ). Les nombres complexes seront soulignés ( $z \in \mathbb{C}$ ) à l'exception de  $j$  tel que  $j^2 = -1$ . Une quantité surmontée d'un point indique la dérivé par rapport au temps de cette quantité ( $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ). Les trois parties de ce sujet sont largement indépendantes. Les données utiles à certaines applications numériques et un formulaire sont rassemblés en fin d'énoncé.

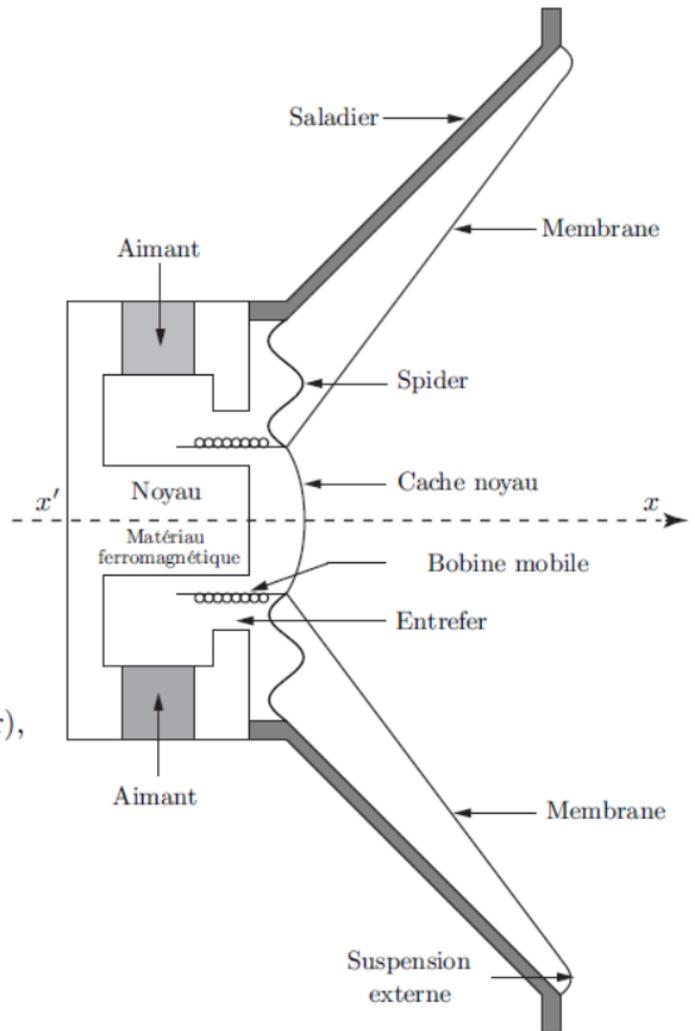


FIGURE 1 – Schéma du haut parleur électrodynamique

## I. — Calcul du champ magnétique dans l'entrefer

❑ 1 — Rappeler, pour un milieu quelconque, la relation vérifiée par le champ magnétique  $\vec{B}$ , le vecteur excitation magnétique  $\vec{H}$  et le vecteur aimantation  $\vec{M}$  en un point  $P$  de ce milieu. Donner l'unité de chacun de ces vecteurs.

❑ 2 — Le matériau ferromagnétique dans lequel l'aimant permanent a été inséré est un matériau doux de très haute perméabilité. Qu'appelle-t-on milieu magnétique linéaire? Définir la perméabilité relative  $\mu_r$  d'un milieu linéaire. Quelle est son unité? Que peut-on dire de l'excitation magnétique dans un modèle où  $\mu_r$  est infinie?

Dans toute la suite, on supposera que la perméabilité relative  $\mu_r$  du matériau ferromagnétique du circuit magnétique est infinie et l'air sera assimilé à un matériau de perméabilité magnétique relative égale à 1.

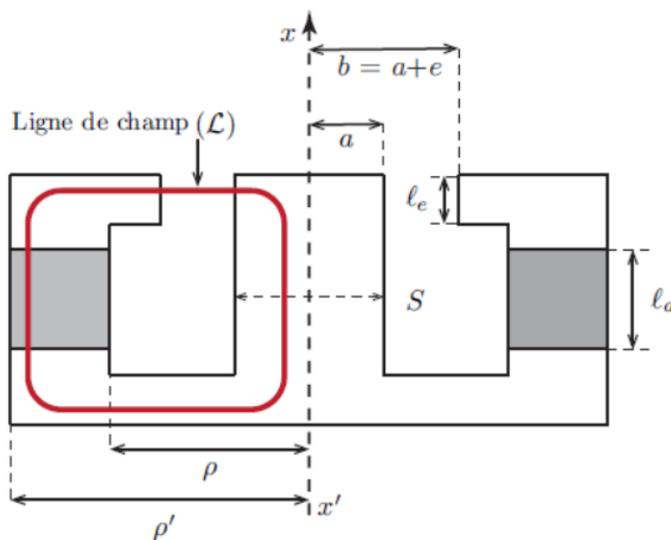


FIGURE 2 – Circuit magnétique

On définit les dimensions suivantes représentées sur la figure 2 :

- $l_a$  : longueur de l'aimant selon  $x'x$  ;
- $S_a$  : section droite de l'aimant orthogonale à  $x'x$  avec  $S_a = \pi(\rho'^2 - \rho^2)$  ;
- $e$  : épaisseur de l'entrefer compris entre les rayons  $a$  et  $b = a + e$  ;
- $l_e$  : hauteur de l'entrefer selon  $x'x$ .

Le rayon de la bobine est noté  $R_b$ .

On supposera que  $e \ll a$ ,  $e \ll b$  et  $e \ll R_b$ .

On notera que la figure 2, volontairement dilatée dans un souci de clarté, n'est pas à l'échelle et donc ne respecte pas ces ordres de grandeur.

L'aimant permanent utilisé dans le circuit magnétique du haut-parleur est un matériau ferromagnétique dur. L'intensité  $M_a$  de son aimantation varie en fonction de l'intensité  $H_a$  de l'excitation magnétique à laquelle il est soumis. Cette variation suit le cycle idéalisé représenté sur la figure 3.

❑ 3 — Comment se nomment  $H_1$  et  $M_1$ ? Les trois vecteurs  $\vec{B}_a$ ,  $\vec{H}_a$  et  $\vec{M}_a$  étant parallèles, tracer le cycle  $B_a(H_a)$  correspondant. Quelles sont les valeurs du champ magnétique  $B_a$  possibles lorsque  $H_a = 0$ ? Comment se nomment-elles? Expliquer comment est décrit ce cycle selon les variations de  $H_a$ . Peut-on définir une perméabilité magnétique relative pour ce matériau? Donner la relation satisfaite par  $H_a$  et  $B_a$  lorsque  $M_a = -M_1$ , on l'appellera relation 1.

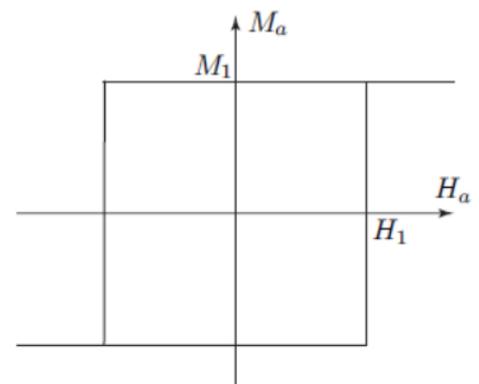


FIGURE 3 – Cycle  $M_a(H_a)$

On suppose dans un premier temps que la bobine n'est parcourue par aucun courant. La résolution numérique des équations issues de l'étude de l'association du circuit magnétique et de l'aimant permanent permet de tracer les lignes de champ (Fig. 4) dans un plan de coupe passant par l'axe  $x'x$ .

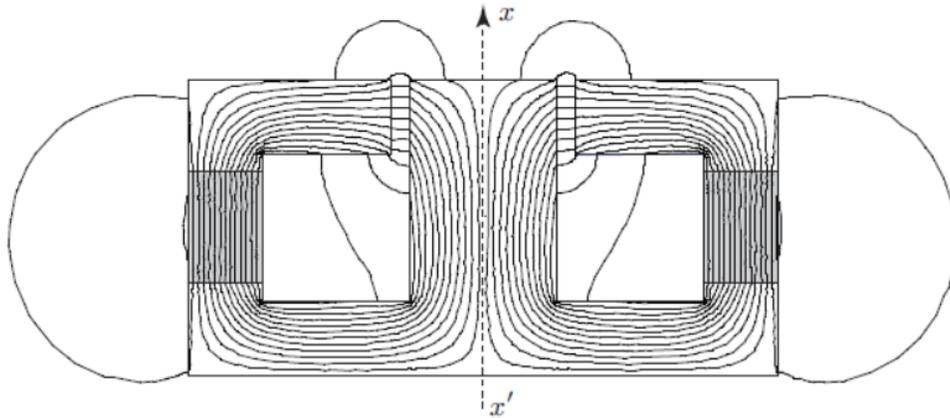


FIGURE 4 – Tracé des lignes de champ du champ magnétique obtenues par résolution numérique

L'aimantation est uniforme et vaut  $\vec{M} = -M_1 \hat{u}_x$  en fonctionnement nominal. Un point  $P$  de l'entrefer est repéré par la base de coordonnées cylindriques  $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_x)$  autour de l'axe  $x'x$ .

□ 4 — Comment se comportent les lignes de champ à l'interface du matériau ferromagnétique constituant le circuit magnétique et l'air ? Montrer que ce comportement est compatible avec les conditions de passage que doivent satisfaire  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  en tous points de la surface séparant l'air et le matériau ferromagnétique.

Soit  $\phi_0$ , le flux algébrique orienté par  $\hat{u}_x$  traversant une section droite  $S = \pi a^2$  du noyau située en dessous de l'entrefer (figure 2). Par ailleurs, le champ magnétique dans l'air de l'entrefer au niveau de la bobine est noté  $\vec{B}_e = B_e \hat{u}_r$  et celui dans l'aimant, uniforme, est noté  $\vec{B}_a = B_a \hat{u}_x$ .

□ 5 — En analysant les lignes de champ représentées en figure 4, justifier que l'on peut considérer que ce flux se conserve dans le circuit magnétique. Établir une relation entre  $\phi_0$  et  $B_a$  puis entre  $\phi_0$  et  $B_e$ . En déduire la relation, notée (2), entre  $B_a$ ,  $B_e$  et des paramètres géométriques du problème.

On considère la ligne de champ magnétique ( $\mathcal{L}$ ) représentée en figure 2. Au vue de la faible épaisseur de l'entrefer, on considérera que la composante radiale du champ magnétique s'écarte très peu de la valeur  $B_e$ . On note  $\vec{H}_a = H_a \hat{u}_x$ , l'excitation magnétique uniforme dans l'aimant et  $\vec{H}_e = H_e \hat{u}_r$  celle dans l'entrefer.

□ 6 — En appliquant le théorème d'Ampère au contour formé par la ligne ( $\mathcal{L}$ ), établir la relation, nommée (3), entre  $H_a$ ,  $H_e$  et des paramètres géométriques du problème.

□ 7 — À l'aide des relations (1), (2) et (3) exprimer  $B_a$  en fonction de  $M_1$  et des paramètres géométriques. Calculer la valeur numérique de  $B_a$ . On donne  $16\pi \simeq 50$ .

□ 8 — Établir de même l'expression du champ magnétique  $B_e$  dans l'entrefer puis calculer sa valeur numérique.

□ 9 — Quelle condition doit satisfaire la valeur de  $H_1$  pour que l'aimant puisse atteindre son point de fonctionnement nominal ?

## Problème 2 : Séparateur à courants de Foucault.

Le séparateur à courants de Foucault (Fig. 1) est utilisé sur les chaînes de tri des déchets.

Ces déchets peuvent être classés en trois catégories :

- type 1 : les métaux conducteurs électriques et peu aimantables (aluminium, cuivre, magnésium...);
- type 2 : les métaux conducteurs électriques et aimantables (fer, nickel), qui, placés dans un champ magnétique, acquièrent un moment dipolaire magnétique qui les attire vers les zones de fort champ magnétique;
- type 3 : les déchets inertes, ni conducteurs électriques, ni aimantables (plastiques, cartons, céramiques...).

Les déchets sont d'abord broyés en fines particules. Celles-ci sont déposées sur un convoyeur assimilable à un tapis roulant, en translation à la vitesse horizontale  $V_0 \cdot \vec{e}_x$ . Dans le rotor du tapis roulant, situé à l'extrémité finale, est disposé un second rotor. Ce second rotor est aimanté au moyen d'une succession d'aimants dont les pôles Nord et Sud sont alternés. Il crée un champ magnétique  $\vec{B}(x, t) = B_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) \cdot \vec{e}_z$  dans la zone finale du tapis roulant. La pulsation  $\omega$  est liée à la vitesse de rotation du rotor. La zone exposée à ce champ magnétique est de longueur  $a$  avec  $\omega \gg V_0/a$ .

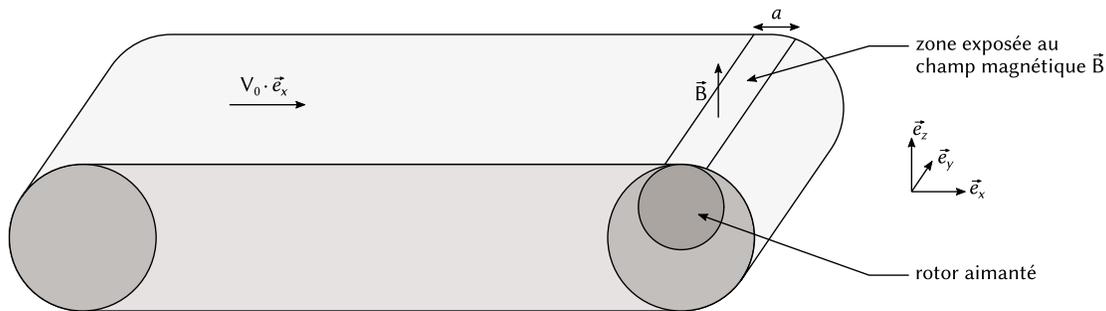


FIGURE 1 – Trieur de déchets.

On s'intéresse d'abord aux déchets de type 1 et 3.

□ 1 — Rappeler dans quel(s) cadre(s) des phénomènes d'induction électromagnétique peuvent être observés.

Pour une particule de déchet, on adopte le modèle suivant :

- la particule possède une vitesse  $\vec{V} = V(t) \cdot \vec{e}_x$  dans la zone exposée au champ magnétique  $\vec{B}$ ;
- les trois dimensions de cette particule sont petites devant  $1/k$ . Son volume est noté  $\tau$ ;
- les particules électriquement conductrices obéissent à la loi d'Ohm locale avec une conductivité électrique  $\gamma$  constante. On pourra considérer  $\gamma = 0$  pour les particules inertes.

On admet, compte-tenu du phénomène d'induction électromagnétique, que lorsque la particule se situe dans la zone exposée au champ magnétique  $\vec{B}$ , elle est le siège d'un champ électrique induit :

$$\vec{E} = B_0 \cdot \left( \frac{\omega}{k} - V(t) \right) \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) \cdot \vec{e}_y. \quad (1)$$

□ 2 — Déterminer, en fonction de  $\gamma$ ,  $B_0$ ,  $\omega$ ,  $k$ ,  $x$ ,  $t$ ,  $V(t)$  et de  $\tau$ , la force de Laplace instantanée exercée sur la particule lorsqu'elle se trouve à une abscisse  $x$  dans la zone aimantée. Comment se simplifie cette expression dans le cas où  $\omega/k \gg V(t)$ ? En déduire l'expression de la force de Laplace moyenne sur le temps qui s'exerce sur la particule pendant sa traversée de la zone exposée au champ magnétique.

□ 3 — Les particules posées sur le tapis arrivent à l'entrée de la zone exposée au champ magnétique avec la vitesse  $V_0 \cdot \vec{e}_x$ . En assimilant, à chaque instant, la force de Laplace qui s'exerce sur une particule à la valeur moyenne précédemment trouvée, exprimer l'augmentation d'énergie cinétique  $\Delta E_c$  d'une

particule de déchet lors de la traversée de la zone exposée au champ magnétique pour les particules de type 1 et de type 3.

□ 4 — Après avoir quitté le convoyeur, les particules sont recueillies dans des bacs situés en bas à droite du convoyeur. Expliquer qualitativement comment positionner ces bacs pour recueillir séparément les particules de type 1 et les particules de type 3. Votre argumentation pourra s'appuyer sur un schéma explicatif sans calcul.

□ 5 — Décrire, sans calcul, le trajet des particules de type 2 après leur entrée dans la zone exposée au champ magnétique. Où peut-on recueillir les particules de type 2?

### Problème 3 : Machine à pancakes

Traditionnellement servis au petit-déjeuner dans les pays d'Amérique du Nord (Canada, États-Unis), accompagnés par exemple de sirop d'érable, les pancakes sont des crêpes plus petites (5 à 10 cm de diamètre) et plus épaisses que les crêpes classiques. Ils sont aujourd'hui appréciés et dégustés dans le monde entier. Ce sujet étudie certains aspects de la conception d'un prototype de machine à poêles et distributeur de pâte à pancakes.

Un circuit électrique précédent permet de faire parcourir un courant sinusoïdal d'intensité

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

dans une bobine plate enroulée en spirale, schématisée sur la figure 4. Le champ magnétique créé par cette distribution de courant est complexe; on se contente de comprendre le principe du chauffage par induction avec un circuit plus simple : une unique spire circulaire de centre O et de rayon R, parcourue par une intensité  $i(t)$ . Dans la suite, on travaille dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , muni de la base orthonormée directe  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

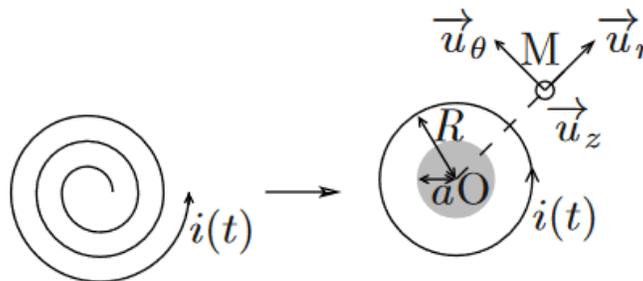


Figure 4 – Bobine : schéma et modélisation

On pose dans le plan de cette spire une poêle, assimilée à un cylindre de rayon  $a < R$  et d'épaisseur  $e$ , de perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  et de conductivité électrique  $\gamma$ . Dans un souci de simplification, on suppose que le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par la spire dans la poêle est uniforme. En notant  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide, on donne :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r i(t)}{2R} \vec{u}_z.$$

□ 1 — Rappeler l'équation locale de Maxwell-Faraday. On donne le théorème de Stokes :

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où  $S$  désigne une surface s'appuyant sur le contour fermé  $L$ . Obtenir une formulation globale de l'équation locale de Maxwell-Faraday.

On cherche le champ électrique induit au sein de la poêle sous la forme  $\vec{E} = E(r, t)\vec{u}_\theta$ .

□ 2 — Déterminer  $E(r, t)$  en fonction de  $r, t, R, I_0, \omega, \mu_0$  et de  $\mu_r$ .

□ 3 — Ce champ électrique induit est responsable de courants de Foucault répartis dans tout le volume du conducteur. Exprimer leur densité de courant volumique  $\vec{j}$  en tout point de la poêle, puis la puissance volumique moyenne  $p$  dissipée par effet Joule en fonction des données.

□ 4 — En intégrant cette puissance volumique moyenne sur le volume de la poêle, montrer que la puissance moyenne totale induite s'écrit :

$$P_{\text{ind}} = \frac{\pi(\mu_0\mu_r)^2\gamma\omega^2 I_0^2 e a^4}{64R^2}$$

□ 5 — On dispose de poêles en aluminium et en fonte. Bien que l'aluminium soit environ 40 fois plus conducteur électriquement que la fonte, on choisira la poêle en fonte : pourquoi ?

En réalité, le champ électromagnétique variable ne pénètre pas la poêle sur toute son épaisseur, mais uniquement sur une taille typique (effet de peau) :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi\mu_0\mu_r\gamma f}}$$

□ 6 — Calculer numériquement  $\delta$  en prenant pour la fréquence  $f = 40$  kHz. En comparant cette taille à l'épaisseur typique d'une poêle, cet effet vous semble-t-il important à prendre en compte pour calculer la puissance induite ?

*Données sur la fonte :*

- Conductivité électrique  $\gamma = 10^6$  S.m<sup>-1</sup>
- Perméabilité relative  $\mu_r = 80$ .

## Problème 4 : Spectre d'un signal numérique

Nous nous proposons ici d'illustrer quelques impacts de la numérisation du signal sismique sur son spectre. Pour des raisons de facilité, cette étude est menée à plus haute fréquence avec le matériel usuel du laboratoire de sciences physiques du lycée. Elle se généralise à tout enregistrement numérique.

### Rappels sur le fonctionnement de l'oscilloscope numérique

- Lors d'un enregistrement, l'oscilloscope numérique discrétise et enregistre un signal sur une durée égale à la durée de balayage, soit 10 carreaux  $\times$  base de temps.
- Le nombre d'échantillons enregistrés est toujours le même et égal à 2 480. La période d'échantillonnage dépend ainsi de la durée d'enregistrement et donc de la base de temps.
- Un menu permet l'affichage du spectre du signal échantillonné. Pour tous les spectres fournis dans cet énoncé, les amplitudes relatives des différentes composantes en fréquence sont représentées sur une échelle en dB en ordonnées. L'échelle des abscisses est linéaire, graduée de  $f = 0$  Hz jusqu'à une fréquence  $f_{\text{max}}$  qui dépend de la base de temps. Deux curseurs verticaux, dénommés X1 et X2, permettent de pointer deux fréquences pour une lecture aisée de leur valeur sur l'écran.

**Expérience 1** Un signal sinusoïdal est délivré par le GBF et est envoyé sur l'oscilloscope numérique. Il a été enregistré avec une base de temps de  $250 \mu\text{s}$  par division comme indiqué en bas de l'écran. Il est à la fois représenté dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel sur l'oscillogramme 1 de la figure 3.

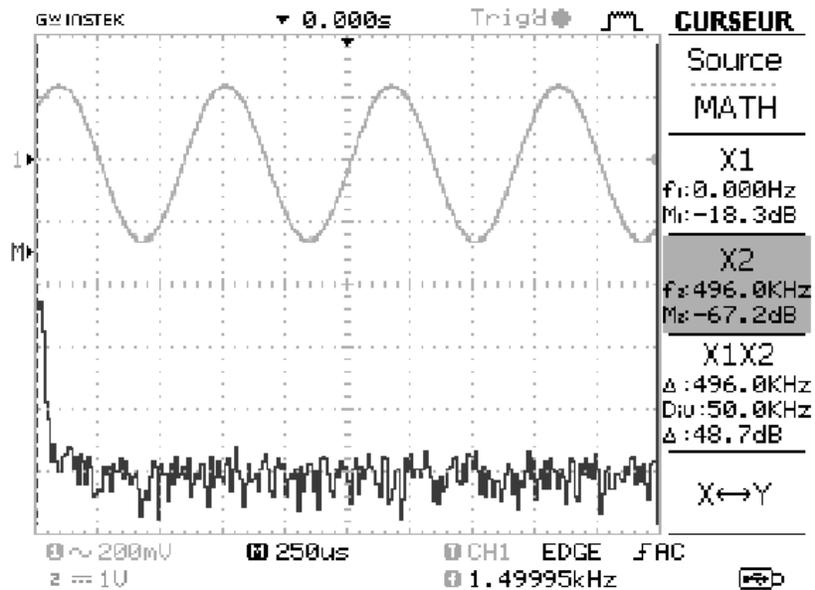


Figure 3 - Oscillogramme 1

❑ 1 — Déterminer la période et la fréquence du signal sinusoïdal. Déterminer une valeur approchée de la fréquence d'échantillonnage de cet enregistrement. Quel lien existe-t-il entre la plus haute fréquence  $f_{max} = 496 \text{ kHz}$ , repérée par le curseur 2, et la fréquence d'échantillonnage ?

❑ 2 — Pour un repérage aisé du pic en fréquence au moyen du curseur X1, il faut dilater l'échelle des fréquences. Quel ajustement proposez-vous de faire sur l'oscilloscope ? Est-ce cohérent avec le nouvel oscillogramme 2 de la figure 4 ? La nouvelle valeur de la plus grande fréquence  $f_{max}$  de ce spectre était-elle prévisible ? Si oui comment ?

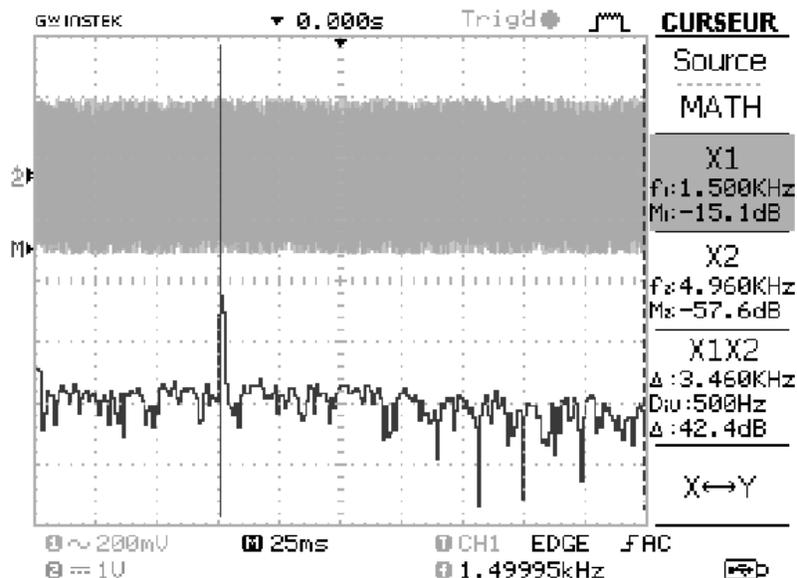


Figure 4 - Oscillogramme 2

□ 3 — On renouvelle cette opération et on obtient l'oscillogramme 3 de la figure 5. Expliquez la valeur  $f = 1$  kHz de la fréquence donnée par le curseur X1.

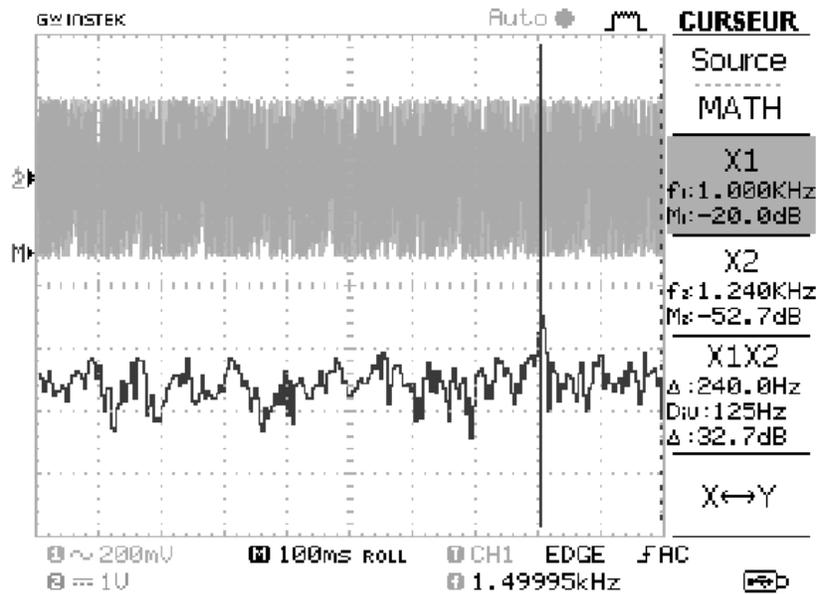


Figure 5 - Oscillogramme 3

□ 4 — On considère un signal de la forme :

$$v(t) = -(V_0 \cos(2\pi f_1 t) + V_0 \cos(2\pi f_2 t) + kV_0^2 \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t))$$

L'enregistrement du signal  $v(t)$  et la détermination de son spectre par l'oscilloscope numérique sont donnés sur l'oscillogramme 4 de la figure 8.

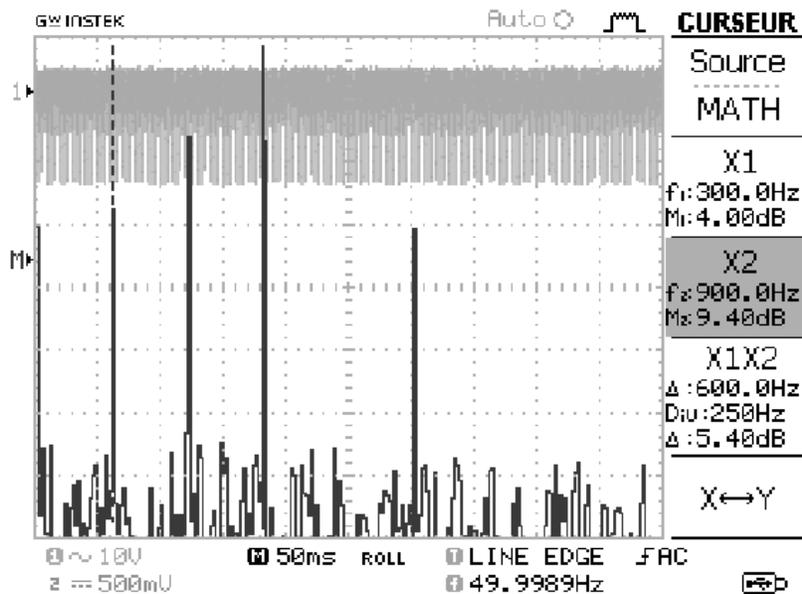


Figure 8 - Oscillogramme 4

Déterminer les valeurs des fréquences  $f_1$  et  $f_2$ .

## Problème 4 : Diagramme potentiel-pH

### I Déchromatation

La Fig. 2 correspond au diagramme  $E - \text{pH}$  du chrome, tracé pour une concentration totale en élément chrome dissous de  $10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Les espèces prises en compte sont  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ ,  $\text{Cr}^{2+}$ ,  $\text{Cr}^{3+}$ ,  $\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}$ ,  $\text{Cr}_{(s)}$  et  $\text{CrO}_4^{2-}$ .

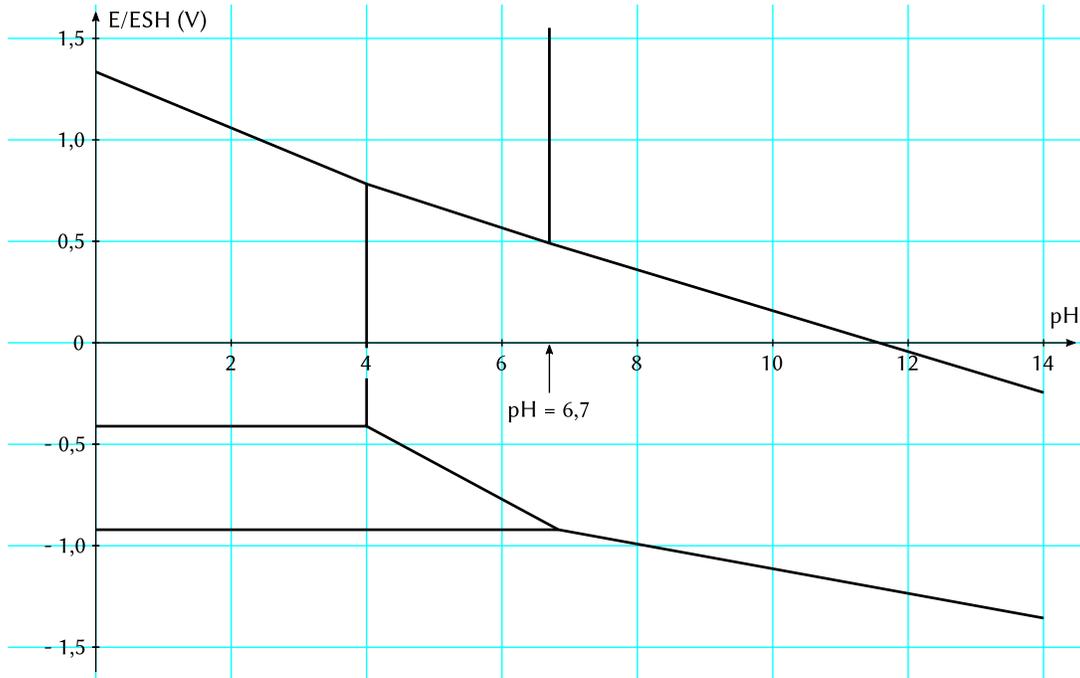


FIGURE 2 – Diagramme E – pH du chrome.

❑ 1 — Déterminer le nombre d'oxydation du chrome dans chacune des six espèces. Montrer que le couple  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{CrO}_4^{2-}$  forme un couple acido-basique. Reproduire sur votre copie l'allure du diagramme  $E - \text{pH}$  de la Fig. 2 en associant un domaine à chacune des six espèces.

❑ 2 — Quel est le pH de début de précipitation de l'hydroxyde de chrome *III*? En déduire le produit de solubilité de l'hydroxyde de chrome *III*, qui correspond à la constante d'équilibre  $K_s$  de la réaction :



❑ 3 — On considère la réaction chimique de constante d'équilibre  $K_1$  :



On rappelle que sur la frontière qui sépare deux espèces dissoutes, il y a autant d'élément chrome dans chacune des deux espèces. Déterminer, à l'aide du diagramme  $E - \text{pH}$  du chrome, la valeur numérique de  $\text{p}K_1 = -\log(K_1)$  de cette constante d'équilibre.

❑ 4 — Lors de la déchromatation, les ions  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  sont réduits en milieu acide en ions  $\text{Cr}^{3+}$  par les ions  $\text{HSO}_3^-$  qui s'oxydent en ions  $\text{SO}_4^{2-}$ . Écrire la réaction chimique qui correspond à la réduction d'une mole de  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ . Déterminer la valeur numérique de la constante d'équilibre  $K_2$  associée à cette réaction. Conclure.

## II Décyanurisation

Les ions cyanure  $\text{CN}^-$  des eaux polluées sont éliminés par oxydation, en milieu fortement basique, en ions  $\text{CNO}^-$ , à l'aide d'un excès d'eau de Javel suivant la réaction :



L'eau de Javel sera assimilée ici à une solution équimolaire d'ions  $\text{Cl}^-$  et d'ions  $\text{ClO}^-$ . La Fig. 3 correspond au diagramme  $E - \text{pH}$  du chlore, tracé pour une concentration totale en élément chlore dissous de  $10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

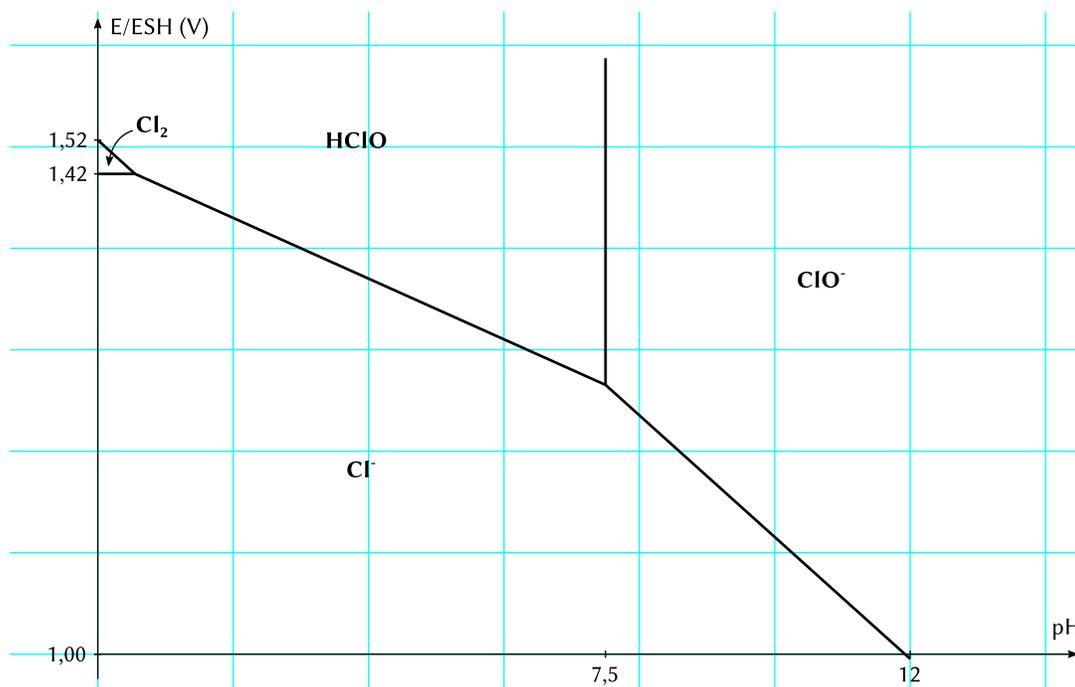


FIGURE 3 – Diagramme  $E - \text{pH}$  du chlore.

□ 5 — Justifier qualitativement à l'aide des diagrammes  $E - \text{pH}$  que cette réaction est quasi-totale. On donne  $E^0(\text{CNO}^-/\text{CN}^-) = -0,13 \text{ V}$

Le dichlore  $\text{Cl}_2$  est un gaz très toxique, voire mortel.

□ 6 — Pourquoi est-il déconseillé d'utiliser l'eau de Javel en milieu trop acide? Écrire l'équation chimique qui se produit lorsqu'on acidifie trop fortement une solution d'eau de Javel.