

Correction TD n°18

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

- ★ Exercice niveau CCP
- Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
- ◇ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Mesure du champ magnétique terrestre*

- Si on applique la loi du moment cinétique scalaire sur la boussole, on aboutit à :

$$J\ddot{\theta} = -\mathcal{M}B \sin \theta$$

c'est-à-dire l'équation différentielle associée à un pendule simple. L'aiguille effectue des oscillations autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.

Sa vitesse maximale est atteinte quand son énergie potentielle est minimale, c.à.d en $\theta = 0$. Pour déterminer cette vitesse, on peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \mathcal{M}B \cos \theta = \text{cste}$$

Sachant que $E_m = 0$ ici, on trouve alors $\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2\mathcal{M}B}{J}}$.

- Pour des petits angles, l'équation différentielle du mouvement est une équation d'oscillateur harmonique. La période du système vaut donc :

$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}}$$

Bien qu'il soit possible d'évaluer J avec un pendule de torsion ou avec un logiciel, il est plus difficile de connaître \mathcal{M} . Cette formule n'est pas exploitable directement.

- Dans le cas où les deux champs sont dans le même sens :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B_0 + B_1)}}$$

et dans le sens opposé, avec forcément $B_1 < B_0$ (sinon l'oscillation aurait lieu autour de $\theta = \pi$) :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B_0 - B_1)}}$$

En écrivant le quotient :

$$\frac{T}{T'} = x = \sqrt{\frac{B_0 - B_1}{B_0 + B_1}} \Rightarrow B_0 = B_1 \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

On a ainsi éliminé dans cette expression la connaissance de \mathcal{M} et J , mais il faudra connaître avec précision B_1 et savoir positionner également avec précision \vec{B}_1 pour qu'il soit aligné avec \vec{B}_0 .

Mesure d'une susceptibilité*

- On suit exactement la même approche que dans le cours. Ce qui change est seulement l'écriture de la conservation du flux avec le changement de section : $B_e S = B_f S$.
- La force magnétique volumique est $\vec{f} = (\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$. *Remarque : cette expression fait penser à l'expression de la force $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B})$ qui s'applique sur un moment magnétique. Bien qu'étant reliées, ces deux expressions ne sont pas tout à fait les mêmes. On a $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ et $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ avec $\mu_r = 1 + \chi_m \approx 1$ pour un paramagnétique. On en déduit :*

$$\vec{f} = \chi_m \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \chi_m \right)$$

A la dernière étape, on a utilisé le fait que : $\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{A^2}{2}$.

3. On applique le principe fondamental de la statique des fluides à une particule de fluide de volume dV . En utilisant l'expression des forces volumiques de pression, de pesanteur et magnétique, on obtient :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}PdV + \rho\vec{g}dV + \vec{f}dV = \vec{0}$$

En remarquant que $\rho\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\rho gz)$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(-P - \rho gz + \frac{B^2}{2\mu_0}\chi_m\right) = \vec{0}$$

soit :

$$P + \rho gz - \frac{\chi_m}{2\mu_0}B^2 = \text{cste}$$

En appliquant cette relation en deux points M et N situés au niveau des deux surfaces libres du liquide (de différence de hauteur égale à $2\Delta h$), on en déduit :

$$P_0 + \rho g\Delta h - \frac{\chi_m}{2\mu_0}B^2 = P_0 - \rho g\Delta h$$

$$\Delta h = \frac{\chi_m}{4\rho g\mu_0}B^2 > 0$$

Le niveau du fluide s'élève dans l'entrefer.

4. En isolant χ_m ; on trouve $\chi_m = 1, 1.10^{-4}$.

Capteur d'intensité électrique*

1. On applique le théorème d'Ampère à une ligne de champ moyenne du circuit magnétique, orientée sur le schéma dans le sens trigonométrique :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI_0 - N'I_c \Rightarrow H_f(\ell_e) + H_e e = NI_0 - N'I_c$$

La relation constitutive des milieux ferromagnétiques dans l'entrefer et dans le circuit et la conservation du flux magnétique permettent de conclure :

$$B_e = \frac{\mu_0}{e}(NI_0 - N'I_c)$$

où on a négligé l'excitation magnétique dans le circuit ($\mu_r \rightarrow \infty$). On en déduit :

$$v_H = \alpha \frac{\mu_0}{e}(NI_0 - N'I_c)$$

2. Une première loi des mailles donne :

$$0 = kRi(t) + v_H(t) + kR'i(t)$$

soit $v_H(t) = -k(R + R')i(t)$. Une deuxième loi des mailles donne :

$$-Ri(t) - R'(i(t) + i_c(t)) = 0$$

soit $(R + R')i(t) = -R'i_c(t)$. D'où $v_H(t) = kR'i_c(t)$.

3. On a :

$$kI_c R' = \alpha \frac{\mu_0}{e}(NI_0 - N'I_c) \Rightarrow I_c = \frac{NI_0}{\frac{kR'e}{\alpha\mu_0} + N'}$$

D'où $\gamma = \frac{NR_0}{\frac{kR'e}{\alpha\mu_0} + N'}$. On en déduit $R_0 = 450\Omega$.

Reluctance et analogie électrique*

1. On applique le théorème d'Ampère qui donne $H\ell = Ni$. Par ailleurs $H = \frac{B}{\mu}$. Enfin, $\Phi = BS$. En rassemblant toutes ces relations, on obtient :

$$\mathcal{F} = \frac{\ell}{\mu S}\Phi$$

2. On recommence la même démonstration, à savoir que l'on applique le théorème d'Ampère :

$$H_1\ell_1 + H_2\ell_2 = Ni \Rightarrow \frac{B_1}{\mu_1}\ell_1 + \frac{B_2}{\mu_2}\ell_2 = Ni$$

B étant à flux conservatif et la section du tore étant constante, on a $B_1 = B_2 = \frac{\Phi}{S}$. On en déduit :

$$\mathcal{F} = \Phi \left(\frac{\ell_1}{\mu_1 S} + \frac{\ell_2}{\mu_2 S} \right) = \Phi(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)$$

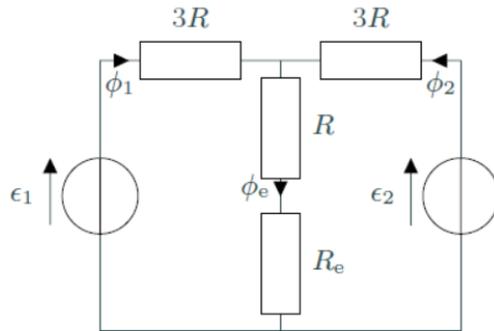
c'est-à-dire que l'on a constitué un circuit magnétique contenant deux reluctances en série.

3. On écrit cette fois le théorème d'Ampère sur deux contours, l'un passant dans le milieu 1, l'autre dans le milieu 2 :

$$Ni = \frac{B_1}{\mu_1}\ell_1 = \frac{B_2}{\mu_2}\ell_2$$

puis le flux à travers la section du tore complet s'écrit $\Phi = B_1S_1 + B_2S_2$. En combinant ces relations, on obtient une loi d'association parallèle.

4. On peut dessiner un circuit électrique équivalent :



La loi des noeuds conduit à $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_e$, les lois des mailles à :

$$\begin{cases} N_1 i_1 = 3\mathcal{R}\Phi_1 + (\mathcal{R} + \mathcal{R}_e)\Phi_e \\ N_2 i_2 = 3\mathcal{R}\Phi_2 + (\mathcal{R} + \mathcal{R}_e)\Phi_e \end{cases}$$

soit en les sommant :

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = (5\mathcal{R} + 2\mathcal{R}_e)\Phi_e$$

soit avec $\Phi_e = B_e S$:

$$B_e = \frac{\mu_0(N_1 i_1 + N_2 i_2)}{2e + \frac{5L}{\mu_r}} = 0,37 \text{ T}$$

Transition paramagnétique-ferromagnétique•

1. Les deux niveaux d'énergies valent $E_+ = -\mu_B B_0$ et $E_- = \mu_B B_0$.
2. Notons N_+ le nombre de particules dans l'état + et N_- le nombre de particules dans l'état -. On a : $N_+ = n_+ V = k e^{-x}$, $N_- = n_- V = k e^x$ et $N = nV = k(e^{-x} + e^x)$ où k est une constante. On en déduit :

$$\boxed{n_+ = n \frac{e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \quad n_- = n \frac{e^x}{e^{-x} + e^x}}$$

3. Par définition de \vec{M}

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mathcal{M}}_i}{V} = \frac{N_+ \mu_B \vec{u}_z - N_- \mu_B \vec{u}_z}{V} = (n_+ - n_-) \mu_B \vec{u}_z = n \mu_B \tanh(x) \vec{u}_z$$

Quand $x \rightarrow 0$, c'est-à-dire $T \rightarrow \infty$, l'agitation thermique est telle que l'aimantation globale est nulle, il y a autant d'atomes orientés dans le sens du champ que dans le sens opposé ; à l'inverse quand $x \rightarrow \pm\infty$, l'aimantation est maximale car les moments magnétiques sont orientés dans le sens du champ magnétique.

4. En l'absence de champ appliqué, l'aimantation doit à la fois vérifier $M = \mu_B n \tanh(x)$ et $M = \frac{B_w}{\mu_0 \alpha} = \frac{k_B T}{\mu_0 \mu_B \alpha} x$. L'intersection entre ces deux courbes n'est possible que si la droite possède une pente inférieure à la tangente à la courbe représentative de $f(x) = \mu_B n \tanh(x)$ en $x = 0$. Or $f'(0) = \mu_B n$. Donc il y a une intersection si :

$$T < T_c = \frac{\mu_B^2 \mu_0 \alpha n}{k_B}$$

T_c est appelée température de Curie.