

DS n°5

niveau difficile

PSI 2021/2022

Durée 4 heures - Calculatrices **autorisées**

I. — Effet Hall et mesures (X-ENS)

Ce problème s'intéresse au phénomène de l'effet Hall à la base de la définition de l'Ohm et de la mesure de courant de précision.

Note du prof : On s'intéresse à un problème bidimensionnel. A ce titre, certaines formules/grandeurs "perdent" une dimension en longueur :

- la densité surfacique N_s remplace la densité volumique n^* ,
- la densité surfacique de courant $\vec{j}_s(M)$ remplace la densité volumique de courant $\vec{j}(M)$,
- une intensité est définie comme la quantité d'électrons traversant une longueur L (et non plus une surface S) par unité de temps.

Elle est égale au "flux" de $\vec{j}_s(M)$ à travers L :

$$I = \int_0^L \vec{j}_s(M) \cdot d\vec{L}$$

où $d\vec{L}$ est un vecteur de type longueur élémentaire perpendiculaire au segment L .
Dans le cas uniforme, on a simplement $I = j_s L$.

I.A. — Principe

On s'intéresse à un gaz bidimensionnel d'électrons libres que l'on fabrique à l'interface entre deux semi-conducteurs de surface carrée de côté L .

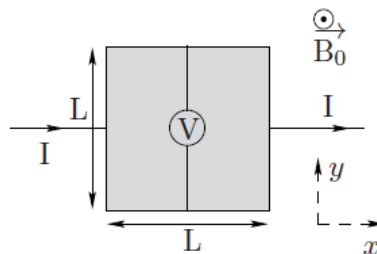


FIG. 2 – Représentation dans le plan (Oxy) du gaz d'électrons (carré grisé).

Le gaz d'électrons a une densité surfacique $N_s = 8 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$. On place une sonde de même dimension que le gaz au niveau de cette interface, dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan (Oxy) : $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. On note $\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\vec{e}_x + E_y(\vec{r})\vec{e}_y$ le champ électrique dans ce même plan. On fait circuler un courant dans cette sonde et on suppose que les électrons dans le plan sont soumis à l'action de la force de Lorentz et d'une force de frottement $\vec{f} = -m^* \frac{\vec{v}}{\tau}$ où τ désigne un temps de collision moyen et $m^* = 0,07m_e$ où m_e est la masse de l'électron. Dans tous les calculs, la masse de l'électron est remplacée par sa masse m^* dite effective.

❑ 1 — Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron, et montrer que la solution en régime permanent peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} j_{sx} \\ j_{sy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

où σ_{ij} représente les composantes de la matrice conductivité et où $\vec{j}_s$ est la densité surfacique de courant qui parcourt le gaz d'électrons bidimensionnel. Exprimer les composantes de la matrice conductivité en fonction de la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{eB}{m^*} > 0$ et de $\sigma_0 = \frac{N_s e^2 \tau}{m^*}$

❑ 2 — Quelle est la signification physique de σ_0 ?

Lors d'une mesure d'effet Hall, on observe seulement un courant qui circule, en régime permanent, dans la direction Ox en présence d'un champ $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. On mesure la tension transversale V_H à l'aide d'un voltmètre d'impédance d'entrée infinie.

❑ 3 — Expliquer brièvement l'origine de la tension transversale V_H .

❑ 4 — Définir ce que l'impédance d'entrée. Pourquoi doit-on avoir une impédance d'entrée du voltmètre « très grande »

❑ 5 — Établir la relation entre j_{sx} et E_y en régime permanent en fonction de σ_0 , ω_c et τ (effet Hall).

❑ 6 — En déduire l'expression de la résistance de Hall définie par : $R_H = V_H / I$ en fonction de e , B_0 et N_s .

On polarise une sonde à effet Hall avec une densité surfacique de courant limitée à cause des problèmes d'échauffement à $j_s = 200 \text{ A.m}^{-1}$.

❑ 7 — Exprimer la sensibilité de la sonde de Hall définie par $s = \delta V_H / \delta B$ en fonction de L , N_s , j_s et e .

❑ 8 — Calculer la valeur numérique de s pour $L = 5 \mu\text{m}$.

❑ 9 — L'imperfection des appareils limite la précision de la mesure de la tension de Hall à $\pm 1 \text{ nV}$. Quel est le champ minimal que l'on peut mesurer à l'aide de la sonde précédente ?

I.B. — Application à la mesure de courant

Dans cette partie, nous utilisons un capteur à effet Hall pour obtenir une tension image d'un courant à étudier. On représente une structure possible sur la figure ci-dessous. Le système est constitué d'un matériau ferromagnétique doux de perméabilité relative μ_r , de longueur L et de section S_f et d'un bobinage de N spires parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ entourant le circuit magnétique. L'entrefer a une longueur ℓ et une section S_e . Hormis dans les trois dernières questions de cette partie, on néglige toutes les pertes.

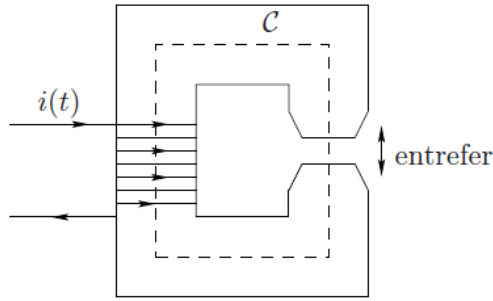


FIG. 3 – Schéma simplifié de la structure.

- 10 — Définir l'excitation magnétique $\vec{H}$.
- 11 — Définir l'ARQS. Que deviennent les équations de Maxwell dans cette approximation?
- 12 — Quelle est la caractéristique principale d'un milieu ferromagnétique doux? Donner un ordre de grandeur de μ_r pour ces milieux en précisant le milieu.
- 13 — Qu'appelle-t-on l'approximation linéaire des ferromagnétiques doux? En déduire la relation entre le champ magnétique dans le matériau ferromagnétique, noté B_f , et l'excitation magnétique H_f .

La résolution numérique des équations issues de l'étude de l'association du matériau ferromagnétique et du bobinage permet de tracer les lignes de champ (figure 4).

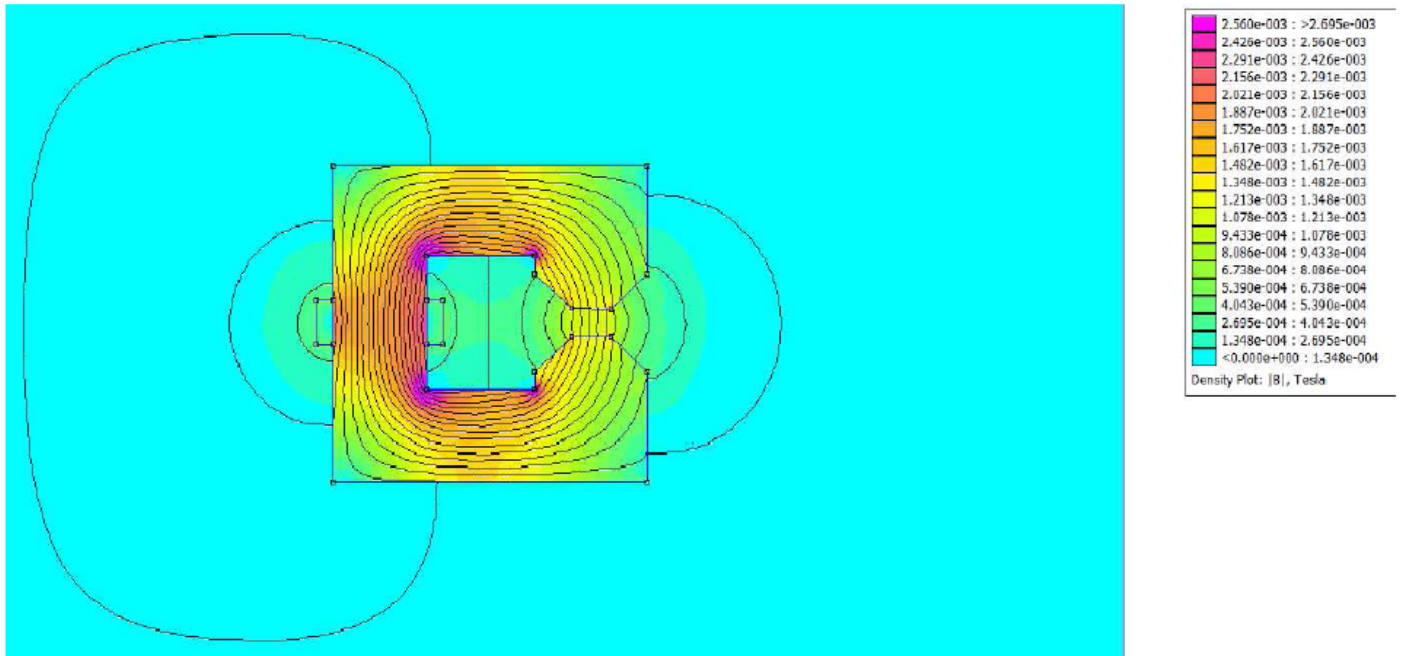


FIG. 4 – Lignes de champ obtenues par résolution numérique.

- 14 — À quelle condition géométrique peut-on considérer que les lignes de champ restent parallèles entre elles dans l'entrefer? On supposera cette condition vérifiée dans tout le sujet.
- 15 — D'après la figure, que peut-on dire du flux magnétique?
- 16 — Montrer que le champ magnétique B_e dans l'entrefer vérifie la relation $B_e = \alpha i$ avec α une constante à déterminer en fonction de $S_e, S_f, L, \mu_0, N, \ell$ et μ_r .

❑ 17 — On place maintenant un capteur à effet Hall dans l'entrefer. En fixant le plus précisément possible un courant d'intensité I continu, montrer que l'on récupère une tension V_H proportionnelle à l'intensité $i(t)$. Déterminer le coefficient de proportionnalité.

On s'intéresse maintenant aux pertes fer.

❑ 18 — Quels sont les deux phénomènes associés aux pertes fer? On détaillera l'origine de chaque perte. Quel autre type de perte existe dans ce système?

❑ 19 — En pratique, comme règle empirique, on considère que les pertes fer sont minimisées si le produit $N \times i \times f$ (N est le nombre de spires du bobinage, f la fréquence du courant d'intensité $i(t)$) est le plus faible possible. Justifier cette règle empirique.

❑ 20 — Pourquoi doit-on alors être vigilant lorsqu'on utilise ce type de capteur avec un courant d'intensité $i(t)$ périodique non-sinusoïdal quelconque même de faible amplitude?

I.C. — Mesure expérimentale

Pour des raisons pratiques, les mesures de précision sont faites à de basses températures. On donne ci-dessous le résultat expérimental de la mesure de la résistance Hall R_H d'un gaz d'électrons d'un échantillon GaAs/AlGaAs en fonction du champ magnétique appliqué à une température de 0,1 K.

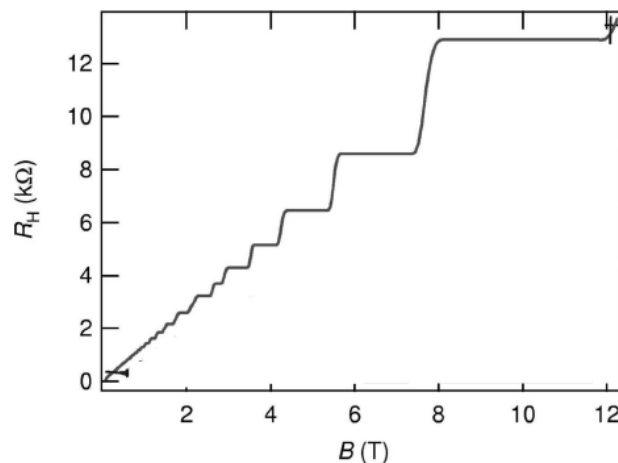


FIG. 5 – Mesure expérimentale de la résistance Hall R_H d'un gaz d'électrons d'un échantillon GaAs/AlGaAs en fonction du champ magnétique B à une température de 0,1 K.

❑ 21 — D'après les résultats de la partie II.1, quelle courbe attend-on? Commenter la courbe obtenue.

❑ 22 — Retrouver l'ordre de grandeur de la valeur de la charge élémentaire e sachant que le gaz d'électrons a une densité surfacique de $N_{s,exp} = 8 \times 10^{15} m^{-2}$.

Seule la mécanique quantique peut prédire la courbe obtenue expérimentalement à basse température (effet Hall quantique). Elle montre que l'écart de résistance entre deux paliers successifs est une fonction universelle R_u de la constante de Planck h et de la charge élémentaire e .

❑ 23 — Par analyse dimensionnelle, déterminer l'expression de la résistance R_u en fonction de h et de e . En déduire sa valeur numérique. La constante multiplicative sans dimension est prise égale à 1.

❑ 24 — Expliquer l'intérêt d'utiliser l'effet Hall quantique pour définir un étalon de résistance.

Constantes usuelles :

- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$;
- Masse de l'électron : $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$;
- Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$;
- Charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$;
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

II. — Etude d'un transformateur torique (Mines-Ponts)

Un transformateur est constitué d'un tore dont la section est un disque de diamètre $2a$ et dont le centre A se déplace sur un cercle de centre O sur l'axe du tore et de rayon r_m (le rayon moyen). Ce tore est réalisé dans un matériau ferromagnétique homogène et isotrope. Le primaire est formé d'un bobinage comportant N_p spires et le secondaire d'un bobinage comportant N_s spires. Ces deux bobinages sont implantés sur deux zones diamétralement opposées du tore. On suppose que $a \ll r_m$, que les lignes de champ magnétique sont des cercles concentriques, que les normes des champs magnétique B , excitation magnétique H et aimantation M sont uniformes dans le tore. On néglige les résistances des bobinages.

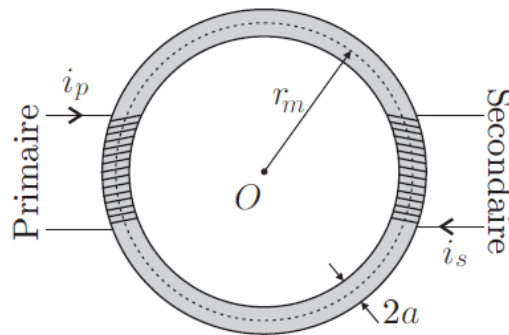


FIGURE 5 – Transformateur

□ 1 — Que signifie le terme "ferromagnétique" ?

□ 2 — Définir et donner l'allure de la courbe de première aimantation (B en fonction de H). Faire apparaître sur cette courbe le champ magnétique de saturation.

On utilise le transformateur précédent dans le montage de la figure 6 dans lequel l'amplificateur opérationnel est idéal, de gain infini et fonctionne en régime linéaire. On suppose de plus que N_p et N_s sont du même ordre de grandeur et que $i_s \ll i_p$.

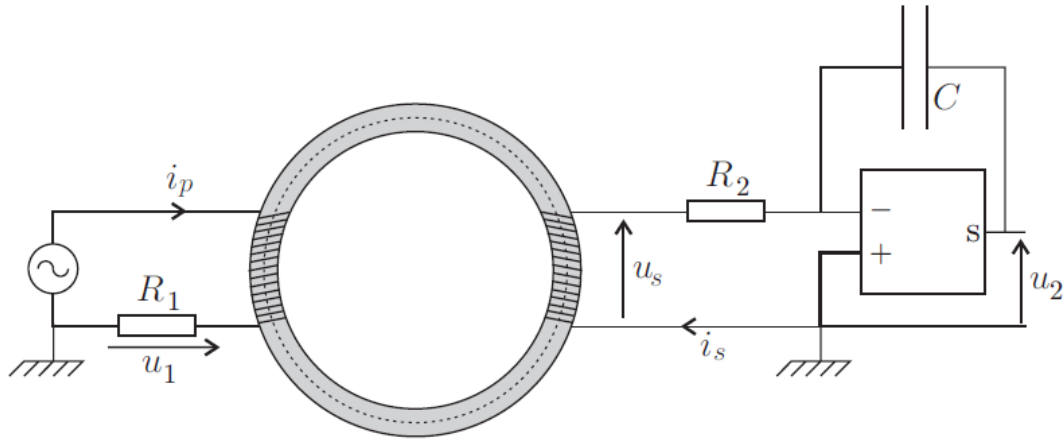
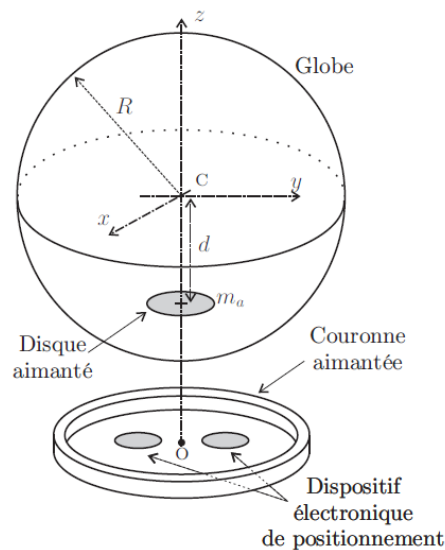


FIGURE 6 – Montage avec transformateur torique

- 3 — Etablir les expressions de $H(t)$ et de $B(t)$ en fonction des tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
- 4 — On visualise sur l'écran d'un oscilloscope bicourbe en mode XY, la tension u_2 en ordonnée et la tension u_1 en abscisse. Montrer que l'on trace ainsi le cycle d'hystérésis du transformateur.
- 5 — Tracer l'allure d'un tel cycle en faisant apparaître le champ coercitif et le champ rémanent.
- 6 — Montrer que l'aire du cycle donne accès à l'énergie dissipée par hystérésis.

III. — Champ magnétique créé par un dispositif de lévitation magnétique (Mines-Ponts)

On s'intéresse dans cette partie à un dispositif un peu particulier, constitué d'un système producteur d'un champ magnétique $\vec{B}_c$, en l'occurrence une couronne torique à section rectangulaire aimantée incluse dans une base en plastique, et d'un petit globe terrestre en lévitation au-dessus de cette base (figure ci-dessous).



On se propose dans les questions suivantes de modéliser le champ magnétique $\vec{B}_c$ créé par une couronne aimantée circulaire de rayon ρ_c .

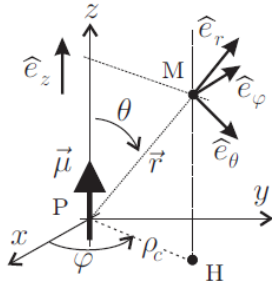


FIGURE 6 – Géométrie du dipôle

On admet qu'un dipôle magnétique situé en P , de moment magnétique $\vec{\mu} = \mu \vec{e}_z$, crée en un point M , tel que $r = \|\vec{PM}\|$ un champ magnétique :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\frac{3\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - \vec{\mu} \right)$$

□ 1 — Exprimer dans la base locale sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, les composantes de ce champ magnétique au point M représenté sur la figure 6. Justifier le fait que le problème soit invariant par rotation autour de Oz . Montrer que l'on peut exprimer la composante de $\vec{B}$ sur $\vec{e}_z$ en fonction des variables z et $\rho_c = \|\vec{PH}\|$ sous la forme :

$$B_z(\rho_c, z) = B_0 \Psi(\eta) \text{ avec } B_0 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi \rho_c^3} \text{ et } \Psi(\eta) = \frac{2\eta - 1}{(\eta + 1)^{\frac{5}{2}}} \text{ avec } \eta = \left(\frac{z}{\rho_c} \right)^\alpha$$

dans laquelle on précisera la valeur de l'entier α .

□ 2 — Pour une valeur fixée de ρ_c , tracer l'allure de $B_z(\rho_c, z)$ en fonction de z .

On considère une couronne circulaire aimantée de largeur e et de hauteur ε ; on suppose qu'à la fois e et ε sont très faibles devant la taille caractéristique de la couronne (voir figure 7).

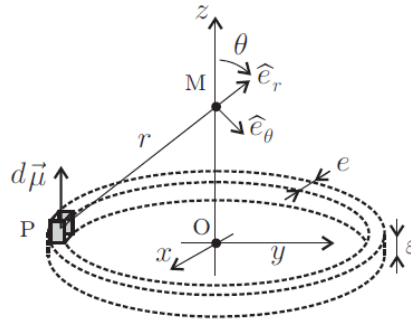


FIGURE 7 – Géométrie du dipôle

Cette couronne est donc assimilée à un fil circulaire infiniment fin, de rayon ρ_c et dont l'aimantation est supposée uniforme : le moment magnétique $d\vec{\mu} = \mu_\ell d\ell \vec{e}_z$ d'un élément de longueur $d\ell$ de cette couronne est constant tout comme le module de son aimantation linéique μ_ℓ .

□ 3 — Déterminer l'amplitude $B_{cz}(z)$ du champ magnétique axial créé par la couronne en un point M situé sur l'axe Oz à la cote z .

□ 4 — Calculer le champ magnétique créé en $z = 5,5$ cm par la couronne de rayon $\rho_c = 4,5$ cm et possédant un moment magnétique $\mu = 2\pi \rho_c \mu_\ell = 30$ SI.

IV. — Dosage d'une eau de Javel (Mines-Ponts)

Une eau de Javel est une solution basique supposée équimolaire de Cl^- et de ClO^- . On désire vérifier, à l'aide d'un dosage, la concentration c_0 en ClO^- ou Cl^- d'un produit commercial.

Rappels

On rappelle que le diiode est soluble dans l'eau en présence d'une quantité suffisante d'iodure de potassium et prend alors une couleur jaune brunâtre. Il forme en présence d'empois d'amidon un complexe de couleur bleue.

Protocole

- Étape 1 : on dilue d'un facteur 100 le produit commercial. On prélève ensuite un volume V_{init} de solution diluée.
 - Étape 2 : on ajoute de l'iodure de potassium (K^+ , I^-) en excès.
 - Étape 3 : on acidifie la solution en ajoutant quelques gouttes d'une solution d'acide chlorhydrique concentrée. La solution prend alors une couleur jaune brunâtre.
 - Étape 4 : on ajoute une faible quantité d'empois d'amidon pour que le dosage ne soit pas perturbé. La solution est alors de couleur bleue intense.
 - Étape 5 : on dose alors la solution par une solution de thiosulfate de sodium (2Na^+ , $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$) de concentration connue C_1 . On note V_{eq} le volume de thiosulfate versé à l'équivalence, repéré par le changement de couleur.
- ❑ 1 — Écrire l'équation bilan de la réaction chimique qui s'est produite lors de l'étape 2. On pourra au préalable tracer les diagrammes de prédominance des espèces contenant du chlore d'une part et des espèces contenant de l'iode d'autre part en milieu basique. Pourquoi faut-il mettre de l'iodure de potassium en excès?
- ❑ 2 — Écrire l'équation bilan de la réaction chimique qui s'est produite lors de l'étape 3. Quel nom porte cette équation d'oxydo-réduction?
- ❑ 3 — Écrire l'équation bilan de la réaction qui a lieu avec le thiosulfate de sodium. Déterminer la valeur numérique de sa constante d'équilibre.
- ❑ 4 — Déterminer la concentration C_0 en fonction de V_{init} , V_{eq} et C_1 .

Données :

- Pour des valeurs de pH supérieures à 10, on a $E(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) \geq 1$ et $E(\text{IO}_3^-/\text{I}^-) \leq 0,6$.
- Pour des valeurs de pH très faibles, on a $E(\text{IO}_3^-/\text{I}_2) \geq 1$ et $E(\text{I}_2/\text{I}^-) \approx 0,6 \text{ V}$
- On donne $E^0(\text{I}_2/\text{I}^-) = 0,54 \text{ V}$ et $E^0(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,09 \text{ V}$