

Correction DS n°5 niveau dur

PSI 2021/2022

I. — Effet Hall et mesures (X-ENS)

□ 1 — On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En régime permanent les forces qui s'appliquent sur l'électron se compensent; sachant que le poids est tout à fait négligeable vis à vis de la force de Lorentz, il vient :

$$\vec{0} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m^* \vec{v}}{\tau}$$

C'est à dire en projection sur (Ox) et (Oy) :

$$0 = -eE_x - ev_y B_0 - \frac{m^* v_x}{\tau} \quad (1)$$

$$0 = -eE_y + ev_x B_0 - \frac{m^* v_y}{\tau} \quad (2)$$

De (1), on tire : $v_x = \frac{\tau}{m^*}(-eE_x - ev_y B_0)$ que l'on reporte dans (2) pour en déduire v_y puis v_x en fonction des champs :

$$\begin{cases} v_x = -\frac{e\tau}{m^*} \times \frac{1}{1 + (\omega_c \tau)^2} (E_x - \omega_c \tau E_y) \\ v_y = -\frac{e\tau}{m^*} \times \frac{1}{1 + (\omega_c \tau)^2} (E_y + \omega_c \tau E_x) \end{cases}$$

Le vecteur densité volumique de courant est associé à la densité volumique de particule par $\vec{j}_v = n^* q \vec{v}$ et donc par transposition pour des densités surfaciques : $\vec{j}_s = -e N_s \vec{v}$. Compte tenu des expressions des vitesses et avec $\sigma_0 = \frac{N_s e^2 \tau}{m^*}$, on en déduit :

$$\begin{cases} j_{sx} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} [E_x - \omega_c \tau E_y] \\ j_{sy} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} [E_y + \omega_c \tau E_x] \end{cases}$$

Par identification à la formule proposée :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2}$$

$$\sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2}$$

□ 2 — σ_0 représente la conductivité électrique de ce gaz d'électrons à deux dimensions en l'absence de champ magnétique.

□ 3 — En régime transitoire, la force de Lorentz magnétique dévie les électrons vers la plaque inférieure du dispositif. Il y a accumulation de charges négatives sur la face inférieure et défaut de charges négatives sur la face supérieure. Ces charges opposées créent un champ électrique \vec{E}_H perpendiculaire à la plaque. Ce champ est associé à un gradient de potentiel vertical et à une tension V_H .

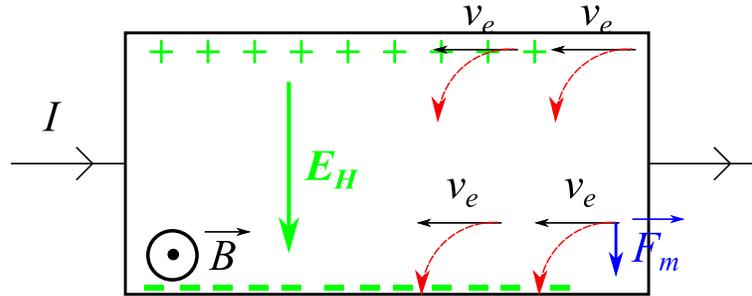


FIGURE 1 – L'effet Hall. Sous l'action de la force magnétique (en bleu), les électrons sont déviés vers le bas. Cela entraîne un déséquilibre permanent de charges entre la face supérieure et la face inférieure du milieu. Ce déséquilibre est à l'origine du champ et de la tension de Hall.

□ 4 — On considère un dispositif alimenté sous une tension V_e et recevant un courant d'intensité I_e , on définit l'impédance d'entrée du dispositif par $Z_e = \frac{V_e}{I_e}$. Le module de l'impédance d'entrée doit être suffisant « grand » pour qu'aucun courant ne passe dans le voltmètre ce qui aurait sinon pour conséquence de prélever les charges des armatures qui créent la tension de Hall que l'on veut mesurer.

□ 5 — En régime permanent, on n'a aucun courant vertical dans le matériau et $j_{Sy} = 0$. On a donc $E_x = -\frac{E_y}{\omega_c \tau}$ d'après la deuxième équation. En substituant dans la première, on obtient :

$$j_{Sx} = -\frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \left[\frac{E_y}{\omega_c \tau} + \omega_c \tau E_y \right] = \boxed{-\frac{\sigma_0}{\omega_c \tau} E_y}$$

□ 6 — Etant donné que le champ E_y est supposé uniforme dans le matériau, on peut simplement écrire $V_H = E_y L$. Par ailleurs, $I = j_{Sx} L$. D'où :

$$I = -\frac{\sigma_0}{\omega_c \tau} V_H \Rightarrow \boxed{R_H = -\frac{\omega_c \tau}{\sigma_0} = \frac{B_0}{e N_s}}$$

□ 7 — On a $V_H = -\frac{B_0}{e N_s} I$. La sensibilité de la sonde au champ magnétique vaut donc, en valeur absolue :

$$\boxed{s = \frac{j_s L}{e N_s}}$$

□ 8 — L'application numérique donne $\boxed{s = 1 \text{V.T}^{-1}}$.

□ 9 — On peut mesurer des champs magnétiques jusqu'à 1 nT!

□ 10 — L'excitation magnétique est définie par la relation :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

□ 11 — L'ARQS est l'approximation des régimes quasistationnaires. Elle consiste à négliger les temps de propagations des signaux électromagnétiques par rapport aux temps caractéristiques d'un problème. Dans cette approximation, le terme de courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère est négligé. On a :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

□ 12 — Un milieu ferromagnétique doux est un milieu caractérisé par un cycle d'hystérésis fin. Son aimantation rémanente et son excitation coercitive sont relativement faibles. μ_r est compris entre 10^3 et 10^5 selon le type d'acier utilisé.

□ 13 — Dans cette approximation, on considère le cycle d'hystérésis comme infiniment fin. Dans ce cas, la relation entre le champ magnétique et l'excitation est linéaire : $B_f = \mu_0 \mu_r H_f$.

□ 14 — Avec $\mu_r \ll 1$, les lignes de champ magnétiques sortent perpendiculaires du matériau ferromagnétique. Pour qu'elles restent parallèles entre elles dans l'entrefer, il faut supposer que :

la longueur de l'entrefer soit petite devant ses dimensions latérales.

□ 15 — D'après la figure, on observe peu de lignes de champ magnétiques en dehors du matériau, on peut donc considérer que le matériau magnétique constitue un tube de champ magnétique. Le champ magnétique étant à flux conservatif (Maxwell-Thomson), on en déduit que le flux du champ magnétique est identique sur toute section droite du circuit magnétique.

□ 16 — Si on néglige toute fuite, la conservation du flux magnétique donne $B_e S_e = B_f S_f$. Par ailleurs, le théorème d'Ampère sur une ligne de champ donne :

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = H_f L + H_e \ell = Ni$$

Sachant que $B_f = \mu_0 \mu_r H_f$ et $B_e = \mu_0 H_e$, on en déduit :

$$B_e \frac{S_e}{S_f} \frac{L}{\mu_0 \mu_r} + B_e \frac{\ell}{\mu_0} = Ni \implies B_e = \frac{\mu_0 Ni}{\ell + \frac{S_e L}{S_f \mu_r}}$$

□ 17 — La tension de Hall vérifie :

$$V_H = -\frac{B_e}{eN_s} I \implies V_H = -\frac{\alpha I}{eN_s} i$$

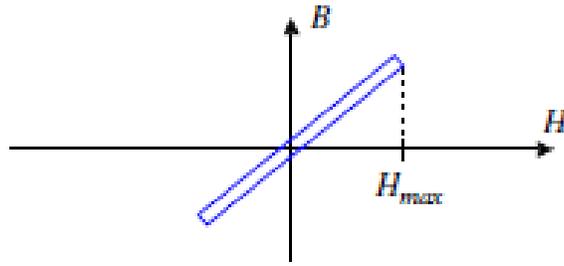
□ 18 — Au sein d'un matériau ferromagnétique, les pertes fer sont de deux types :

- les *pertes par courant de Foucault* : un champ magnétique variable crée un champ électrique (Maxwell-Faraday) qui engendre des courants induits dans le matériau conducteur responsables de pertes par effet Joule, on limite cet effet en feuilletant le matériau ;
- les *pertes par hystérésis* : lors du parcours du cycle, les domaines magnétiques possèdent une forte cohésion, la désaimantation coûte de l'énergie, la puissance dissipée est proportionnelle à l'aire du cycle et à la fréquence.

Les *pertes cuivre*, dissipations par effet Joule dans les fils électriques, s'ajoutent aux pertes fer.

□ 19 — On sait que la puissance volumique dissipée par effet Joule est égale au produit de la fréquence par l'aire du cycle.

$$P = V_{\text{ferro}} f \mathcal{A}$$



Dans le cas d'un cycle étroit, on peut sans doute supposer que l'aire du cycle est proportionnel à l'excitation magnétique, elle-même proportionnelle à Ni d'après le théorème d'Ampère :

$$P \propto V_{\text{ferro}} f Ni$$

❑ 20 — Un signal périodique non sinusoïdal possède des harmoniques de fréquences multiples du fondamental. Les pertes par hystérésis étant proportionnelles à la fréquence, la dissipation causée par ces termes haute fréquence est plus significative.

❑ 21 — D'après la question 6, $R_H = \frac{B}{N_s e}$, on attend une relation de linéarité entre la résistance de Hall et le champ magnétique. Si on constate une « tendance » générale linéaire pour les champs magnétiques inférieur à $2T$, la présence de paliers pour des champs magnétiques plus intenses (quantification de la résistance) ne peut être expliquée par cette théorie classique.

❑ 22 — Graphiquement pour les « faibles valeurs » de champ magnétique, la pente est de l'ordre de $a \approx 10^3 \Omega \cdot T^{-1}$

$$a = \frac{1}{N_s e} \Rightarrow e = \frac{1}{N_s a} = 1,13 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

On retrouve bien l'ordre de grandeur de la charge élémentaire.

❑ 23 — Pour exprimer la dimension d'une résistance, j'aime bien utiliser $P = RI^2$:

$$[R_u] = W \cdot A^{-2} = J \cdot s^{-1} \cdot A^{-2} = J \cdot s \cdot s^{-2} \cdot A^{-2} = J \cdot s \cdot C^2$$

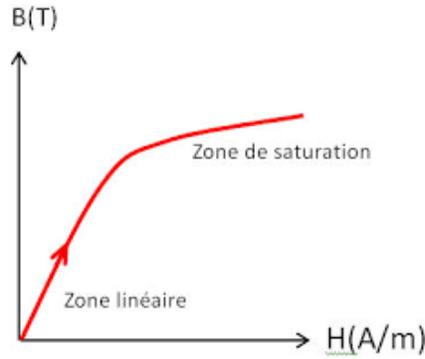
On en déduit directement : $R_u = \frac{h}{e^2}$. L'application numérique donne $R_u = 30000 \Omega$.

❑ 24 — L'effet Hall quantique fournit des valeurs de résistances quantifiées qui ne peuvent prendre que des valeurs bien spécifiques, la valeur unitaire ne dépend que de constantes fondamentales et non des détails géométriques du dispositif. À comparer à un étalon de résistance arbitraire qui serait construit à partir d'une résistance classique dont la valeur dépendrait de la pureté du matériau, de la température, de la forme exacte, . . .

II. — Etude d'un transformateur torique (Mines-Ponts)

❑ 1 — Un matériau ferromagnétique est un matériau présentant une aimantation rémanente forte, rémanente même après la suppression du champ qui lui a donné naissance.

❑ 2 — Notant \vec{M} le vecteur aimantation (densité volumique de moments dipôlares magnétiques), la relation $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ s'écrit, dans le cas d'une aimantation selon une direction unique, $B = \mu_0 (H + M)$, avec deux domaines limites; pour un excitation magnétique H assez faible (au début de l'aimantation), celle-ci est linéaire avec $M \simeq \chi H$ où $\chi > 0$ ($\chi \gg 1$ souvent) est la susceptibilité magnétique et la courbe de première aimantation est quasi-linéaire. Le second domaine est celui des fortes excitation magnétiques pour lesquelles M atteint une valeur de saturation M_s et la courbe est alors affine, $B \simeq \mu_0 (H + M_s)$. Le tracé est proposé ci-dessous :



□ 3 — Le théorème d'Ampère $\oint_{(\mathcal{C})} \vec{H} \cdot \vec{dOM} = i_{\text{enlacé}}$ appliqué à un cercle de rayon r_m orienté dans le sens trigonométrique et donc coupé par les courants $N_p i_p + N_s i_s$ s'écrit $2\pi r_m H = N_p i_p + N_s i_s$ soit (avec $i_s \ll i_p$)

$$H(t) \simeq \frac{N_p i_p(t)}{2\pi r_m}. \text{ Par ailleurs, } u_1 = R_1 i_1 \text{ dans le circuit primaire et } \boxed{H(t) = \frac{N_p}{2\pi r_m R_1} u_1(t)}.$$

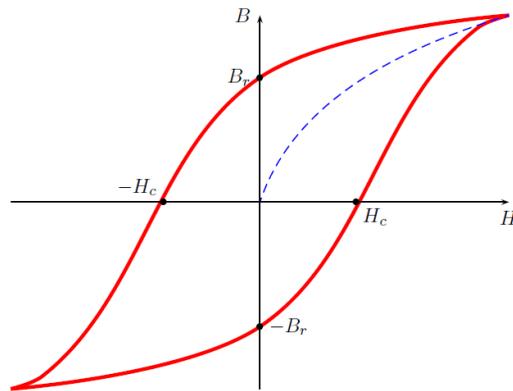
En appliquant le théorème de Millman à la borne inverseuse de l'amplificateur opérationnel du secondaire, $v_- = \frac{u_s/R_2 + u_2 J C \omega}{1/R_2 + J C \omega}$. Dans le fonctionnement linéaire à gain infini, $v_- = v_+ = 0$ et il reste donc

$$u_s = -j R_2 C \omega u_2. \text{ Enfin, la loi de Faraday de l'induction appliqué au bobinage secondaire sonne } u_s = -\frac{d\Phi}{dt}$$

soit en notation complexe $u_s = -j\omega\Phi$ avec $\Phi = N_s \pi a^2 B$; finalement, on obtient $\boxed{B(t) = \frac{R_2 C}{N_s \pi a^2} u_2(t)}$.

□ 4 — À des facteurs multiplicatifs constants près, la courbe $u_2 = u_2(u_1)$ est la même que celle donnant $B = B(H)$, en régime périodique, c'est-à-dire le cycle d'hystérésis du matériau.

□ 5 — Il s'agit d'une question de cours... Le sens de parcours est le sens trigonométrique et la courbe de première aimantation figure en pointillés. B_r est le champ magnétique rémanent et H_c l'excitation du champ coercitif.



□ 6 — Le travail reçu par le matériau lors d'une évolution infinitésimale est $\delta W = u idt = V_{\text{tore}} H dB$. Le travail reçu pendant un cycle est donc directement proportionnel à l'aire du cycle :

$$W = V_{\text{tore}} \oint H dB$$

Si le système fonctionne de manière cyclique, ce travail reçu est également dissipé par l'évolution du matériau au cours du cycle.

III. — Léviton magnétique

□ 1 — En remarquant que $\vec{e}_z = \cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta$, on trouve :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3} (3 \cos\theta\vec{e}_r - (\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)) = \boxed{\frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3} (2 \cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta)}$$

Le moment magnétique restant invariant par rotation autour de Oz , le champ magnétique l'est nécessairement aussi (principe de Curie).

La composante du champ magnétique suivant Oz vaut :

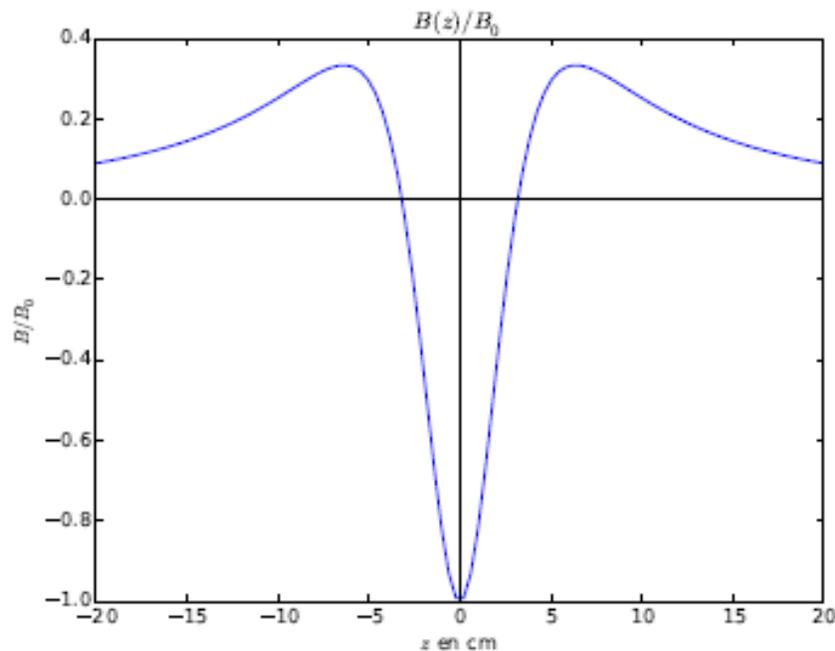
$$B_z(M) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3} (2 \cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Pour trouver la formule demandée, on remarque que $\sin\theta = \frac{\rho_c}{r}$ et $\cotan\theta = \frac{z}{\rho_c}$. Alors :

$$B_z(M) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi\rho_c^3} (2 \cotan^2\theta - 1) \sin^5\theta = B_0 (2 \cotan^2\theta - 1) (\sin^2\theta)^{\frac{5}{2}} = B_0 \frac{2 \cotan^2\theta - 1}{(1 + \cotan^2\theta)^{\frac{5}{2}}}$$

On a donc $\boxed{\alpha = 2}$.

□ 2 — La fonction a l'allure suivante :



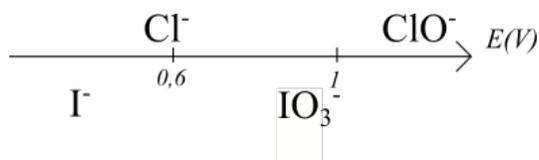
□ 3 — Le champ magnétique total est égal à la résultante des champs créé par chaque petit moment magnétique. On a donc :

$$B_{cz} = \int_0^{2\pi} B_0 \Psi(\eta) \rho_c d\varphi = \boxed{\frac{\mu_0\mu_\ell}{2\rho_c^2} \Psi\left(\left(\frac{z}{\rho_c}\right)^2\right)}$$

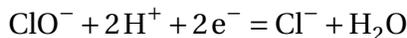
□ 4 — L'application numérique donne $\boxed{B_{cz} = 6.7 \times 10^{-3} \text{T}}$.

IV. — Dosage d'une eau de Javel (Mines-Ponts)

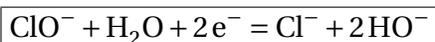
□ 1 — Les diagrammes de prédominance ont l'allure ci-dessous :



On voit que les ions ClO^- et I^- ont des domaines disjoints. Ils vont donc réagir ensemble. Pour écrire la réaction d'oxydoréduction, on écrit obligatoirement les demi-équations redox associées en faisant attention à les équilibrer en milieu basique :



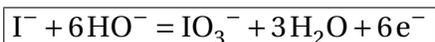
soit en rajoutant 2HO^- à gauche et à droite pour faire disparaître les H^+ :



L'ion I^- s'oxyde selon :



qu'on équilibre en milieu basique :

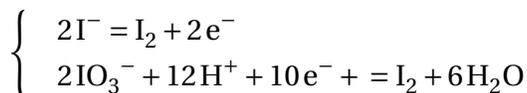


L'équation bilan s'écrit donc :



On met du diode en large excès car on souhaite que le réactif limitant soit ClO^-

□ 2 — A la fin de l'étape 2, on a en solution du I^- , du IO_3^- et du Cl^- (qui n'a pas réagi). Or, à pH faible, I^- et IO_3^- n'ont pas de domaine de prédominance commun. Ils réagissent ensemble pour former du I_2 . Les demi-équations d'écrivent :

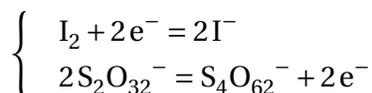


et l'équation-bilan est :



Cette réaction est l'inverse d'une réaction de dismutation. On l'appelle média-mutation.

□ 3 — Les demi-équations s'écrivent :



d'où la réaction de titrage :



La constante de cette réaction est déterminée par la formule :

$$\boxed{K = 10^{\frac{2}{0,06}(E^0(\text{I}_2/\text{I}^-) - E^0(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}))} = 10^{15}}$$

□ 4 — Pour répondre à ce genre de questions, je vous conseille :

-
- de numéroter les équations chimiques,
 - de réfléchir dans votre tête avec des quantités de matières égales aux coefficients stoechiométriques.

D'après l'équation (1), 3 moles de ClO^- forment 1 mole de IO_3^- , donc :

$$n_{\text{ClO}^- , \text{init}} = 3n_{\text{IO}_3^-}$$

D'après l'équation (2), on a, de même :

$$n_{\text{I}_2} = 3n_{\text{IO}_3^-}$$

Enfin, à l'équivalence de l'équation (3) :

$$n_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-}} = 2n_{\text{I}_2}$$

On en déduit :

$$n_{\text{ClO}^- , \text{init}} = \frac{n_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-}}}{2}$$

$$\frac{c_0 V_{\text{init}}}{100} = \frac{C_1 V_{\text{eq}}}{2} \Rightarrow c_0 = 50 \frac{C_1 V_{\text{eq}}}{V_{\text{init}}}$$