Correction DS n°5 niveau moyen

PSI 2021/2022

I. — Transmission d'énergie électrique sans fil (E3A)

I.A. — Étude des bobines utilisées

❑ **1** — En régime variable, les équations faisant intervenir le champ $\vec{B}$ sont :

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dans l'ARQS, ces équations deviennent :

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

❑ **2** — On intègre l'équation de Maxwell-Ampère sur un contour fermé et on utilise le théorème de Stokes :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{d}OM} = \iint_{S_\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{d}S} = \mu_0 \iint_{S_\Gamma} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{d}S} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

❑ **3** — Le solénoïde peut être considéré comme infini si son rayon est faible devant sa longueur et si on considère le champ magnétique loin des bords.

❑ **4** — Pour tout point M, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des courants et donc un plan d'antisymétrie de $\vec{B}(M)$. Donc $\vec{B}(M,t) = B(M,t)\vec{u}_z$. Par ailleurs, il y a invariance par rotation autour de (Oz) et par translation suivant (Oz). On en déduit $\vec{B}(M,t) = B(r,t)\vec{u}_z$.

❑ **5** — On choisit comme premier contour d'Ampère un rectangle dans le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ intégralement compris dans le solénoïde. En appliquant le théorème d'Ampère, on en déduit que le champ à l'intérieur du solénoïde ne dépend pas de r. En choisissant un second rectangle à cheval sur le solénoïde, et en admettant que le champ à l'extérieur du solénoïde est identiquement nul (indication de l'énoncé), on en déduit la formule habituelle $\boxed{\vec{B}(M,t) = \mu \frac{N}{\ell} i(t)\vec{u}_z}$.

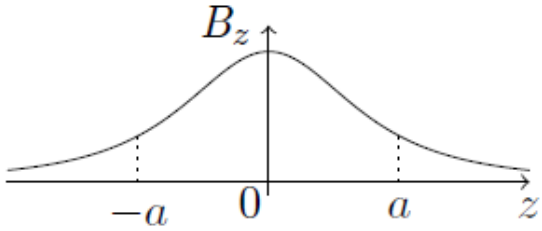
Intéressons-nous à présent au cas d'une bobine « plate », constituée (pour simplifier) de N spires circulaires identiques, d'axe de révolution Oz et de rayon a, placées dans le plan $z = 0$ et parcourues par un courant d'intensité $i(t)$. On se place à nouveau dans le cadre de l'ARQS et on considère un point M de l'axe Oz, de cote $z > 0$.

❑ **6** — Soit un point M situé sur l'axe (Oz) et repéré par son abscisse z. Tous les plans contenant l'axe (Oz) sont des plans d'antisymétrie du courant. Ce sont donc des plans de symétrie de $\vec{B}$. Donc $\vec{B}(z,t)$ appartient à tous ces plans à la fois. Donc $\vec{B}(z,t) = B(z,t)\vec{u}_z$.

❑ **7** — Le plan d'équation $z = 0$ est un plan de symétrie des courants. C'est donc un plan d'antisymétrie du champ magnétique ? On en déduit :

$$B_z(-z,t) = -B_z(z,t)$$

❑ **8** — La fonction $B_z(z)$ a l'allure suivante :



Le champ est maximal en $z = 0$. Il vaut $\boxed{B_{z,\max} = \dfrac{\mu_0 N i(t)}{2a}}$. Par ailleurs, on a :

$$B_z(z_{\frac{1}{2}}) = B_{z,\max}/2$$

$$\frac{a^2}{(a^2 + z_{\frac{1}{2}}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2a}$$

$$2a^3 = (a^2 + z_{\frac{1}{2}}^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$2^{\frac{2}{3}} a^2 = a^2 + z_{\frac{1}{2}}^2 \Longrightarrow \boxed{z_{\frac{1}{2}} = a\sqrt{2^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

❑ **9** — Pour les deux figures (solénoïde et bobine plate) :

—Le plan passant par l'axe vertical de la carte de champ et perpendiculaire à celle-ci, est un plan d'antisymétrie des courants. Ce plan est donc un plan de symétrie du champ magnétique. C'est bien ce qui est observé.

—Le plan passant par l'axe horizontal de la carte de champ et perpendiculaire à cette dernière, est un plan de symétrie des courants, soit également un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Ici, la direction du champ n'est pas renseigné mais on voit qu'il y a bien symétrie de la norme du champ magnétique par rapport à ce plan.

❑ **10** — Les lignes de champ se resserrent aux endroits où le champ magnétique est plus intense. Elles sont parallèles aux endroits où le champ magnétique est uniforme. Ces propriétés viennent de l'équation locale $\mathrm{div}\vec{B} = 0$: le champ magnétique est à flux conservatif.

I.B. — Transfert de puissance : rendement de Yates

❑ **11** — La puissance instantanée reçue par la bobine émettrice vaut :

$$P_{\text{reçue}} = u(t)i(t) = R_1 i^2(t) + L_1 i(t)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) = R_1 i^2(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right)$$

La moyenne temporelle de cette puissance vaut :

$$\begin{aligned} < P_{\text{reçue}} > &= R_1 I_0^2 < \cos^2(\omega t) > - L_1 I_0^2 \omega < \cos(\omega t)\sin(\omega t) > \\ &= R_1 I_0^2 < \cos^2(\omega t) > - \frac{L_1 I_0^2 \omega}{2} < \sin(2\omega t) > \\ &= \frac{R_1 I_0^2}{2} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $<\cos^2(x)>=1/2$ et $<\sin x>=0$.

❑ **12** — Le champ magnétique étant supposé uniforme sur la bobine, on pourra écrire :

$$\Phi = B(z=d)N_2\pi b^2 = \boxed{\frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi b^2 a^2 i(t)}{2(d^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

❑ **13** — En utilisant la loi de Faraday, on a simplement :

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi b^2 a^2 I_0 \omega}{2(d^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\omega t$$

❑ **14** — En considérant la bobine réceptrice comme une résistance pure, le courant $i_2(t)$ traversant la bobine 2 vérifie d'après la loi des mailles $e(t) = R_2 i_2(t)$. On en déduit la puissance générée :

$$P_{\text{géné}} = e(t)i_2(t) = \frac{e^2(t)}{R_2}$$

d'où :

$$<P_{\text{géné}}>= \frac{<e^2(t)>}{R_2} = \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 \pi^2 b^4 a^4 I_0^2 \omega^2}{8R_2(d^2+a^2)^3}$$

❑ **15** — Le rendement peut se mettre sous la forme :

$$\eta = \frac{\pi^2}{4}\frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 b^4 a^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2+a^2)^3}$$

On en déduit $\boxed{k = \frac{\pi^2}{4}}$.

I.C. — Modélisation du couplage : inductance mutuelle

❑ **16** — M est la constante de proportionnalité liant le flux magnétique $\Phi_{12}(t)$ créé par le circuit 1 dans le circuit 2 et le courant $i_1(t)$: $\boxed{\Phi_{12}(t) = M i_1(t)}$. M s'exprime en Henry.

❑ **17** — La loi des mailles dans les deux circuits donne :

$$\begin{cases} E &= R_1 i_1 + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= R_2 i_2 + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

❑ **18** — On multiplie la première équation par i_1 et la deuxième par i_2 puis on les somme. On obtient alors :

$$Ei_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{\mathrm{d}E_{mag}}{\mathrm{d}t}$$

avec : $\boxed{E_{mag} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}$. Le bilan de puissance montre que la puissance fournie par le générateur, Ei_1, est en partie dissipée par effet Joule dans les résistances (terme $R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$), et en partie stockée sous forme magnétique dans les bobines.

❑ **19** — En reprenant l'expression de E_{mag}, on obtient :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} i_2^2 \left(L_2 + 2Mx + L_1 x^2\right)$$

❑ **20** — Sachant que$E_{mag} \geq 0 \forall i_1, i_2$, on en déduit $P(x) \geq 0 \forall x$. Le polynôme $P(x)$ possède donc au plus une racine réelle et son discriminant est négatif ou nul :

$$\Delta \leq 0 \Longrightarrow \boxed{M \leq \sqrt{L_1 L_2}}$$

❑ **21** — On peut citer :
- les transformateurs, qui permettent le transport d'énergie à longue distance,
- le chauffage par induction
- la transmission d'informations par radio-identification (RFID), mise en oeuvre par exemple dans les portiques de sécurité...
- mais aussi les moteurs et alternateurs électriques, les détecteurs de métaux, les détecteurs de fissures par courant de Foucault etc etc...

I.D. — Résultats expérimentaux

❑ **22** — On lit $\eta_{max} = 0,74 \pm 0,03$ (ne pas oublier l'incertitude !), ainsi que la fréquence $f_{max} = 15$ kHz.

❑ **23** — Par la loi théorique de Yates, on s'attend à unecourbe parabolique. Ce comportement "semble" être vérifié jusqu'à 5000 Hz. Pour 5000 Hz$< f <$ 15000 Hz, la croissance du rendement diminue avec la fréquence ce qui n'est pas cohérent avec une parabole. Pour $f >$ 15000 Hz, le rendement diminue avec la fréquence ce qui n'est pas non plus en accord avec la formule.

En réalité, chaque bobine souffre d'effets capacitifs associés aux différents matériaux isolants séparant les spires. On propose de déterminer un ordre de grandeur de cette capacité parasite C_p.

❑ **24** — On a $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

❑ **25** — On en déduit : $\boxed{C_p = \dfrac{1}{L(2\pi f_{max})^2} = 1,3 \cdot 10^{-7}\text{F}}$

❑ **26** — Si on écarte la bobine 2 sur le côté, les lignes de champ s'inclinent par rapport au plan de ses spires. De fait, le flux magnétique Φ diminue, de même que η. En observant la carte de champ de la figure 5, cet effet est d'autant plus marqué que d est petit.

❑ **27** — Cette fois, le rendement diminue beaucoup moins sur les côtés. En tournant la bobine 2, celle-ci reste approximativement alignée avec les lignes de champ : le flux magnétique Φ varie donc très peu, de même que η, contrairement à la question précédente.

II. — Principe de fonctionnement d'un magnétomètre à vanne de flux (E3A)

II.A. — Bobine avec noyau en fer

❑ **1** — Le champ coercitif est le champ H à appliquer pour annuler l'aimantation rémanente du milieu ferromagnétique. Le champ rémanent est le champ magnétique créé par l'aimantation du milieu en absence d'excitation extérieure.

❑ **2** — Un milieu dur est caractérisé par un cycle d'hystérésis large, un grand champ rémanent et un grand champ coercitif. Un milieu doux est caractérisé par un cycle fin, un champ rémanent faible et un champ coercitif faible. La figure 3 est associable à un milieu doux (modélisation linéaire d'un ferromagnétique doux). La courbe du document 1 s'obtient avec un montage analogue à celui-ci :

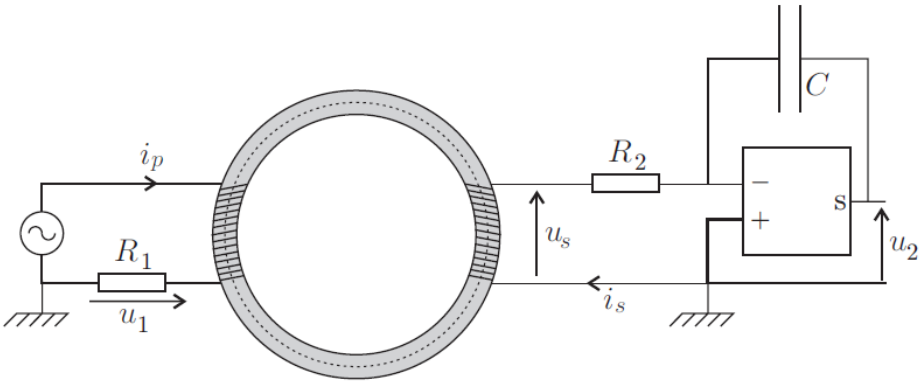


FIGURE 6 – Montage avec transformateur torique

❑ **3** — On définit comme contour d'Ampère un rectangle, exactement comme pour le solénoïde creux en magnétostatique.

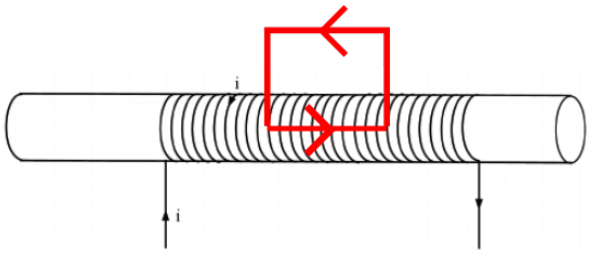


FIGURE 4 – Solénoïde avec noyau ferromagnétique.

L'application du théorème d'Ampère sur ce contour donne :

$$\oint \vec{H}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}OM} = H_{int}\ell = n\ell i \Rightarrow \boxed{H_{int} = ni}$$

Le champ magnétique dans le barreau vaut donc $\boxed{B_{int} = \mu_0\mu_r ni}$

L'amplitude du courant I_m est supposée suffisamment importante pour amener le matériau ferromagnétique à saturation. On notera $e(t)$ la tension aux bornes de la bobine de mesure.

❑ **4** — Il vaut simplement $\Phi = B(t)S$.

❑ **5** — J'aurais voulu demander l'équation de Maxwell-Faraday mais bon... Le phénomène mis en jeu ici est l'induction.

❑ **6** — On a :

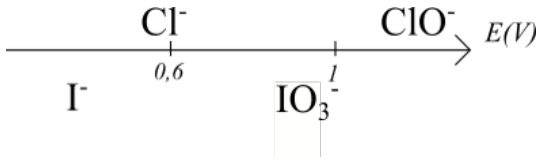
$$e(t) = -N_s S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

—Si le milieu est saturé, alors $B = B_{sat} = cste$ et $e(t) = 0$,

—Si le milieu est non saturé, alors $B(t) = \mu_0\mu_r ni(t)$ et $e(t) = -N_s S\mu_0\mu_r n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$

III. — Dosage d'une eau de Javel (Mines-Ponts)

❑ **1** — Les diagrammes de prédominance ont l'allure ci-dessous :



On voit que les ions ClO^- et I^- ont des domaines disjoints. Ils vont donc réagir ensemble. Pour écrire la réaction d'oxydoréduction, on écrit obligatoirement les demi-équations redox associées en faisant attention à les équilibrer en milieu basique :

$$ClO^- + 2H^+ + 2e^- = Cl^- + H_2O$$

soit en rajoutant $2HO^-$ à gauche et à droite pour faire disparaître les H^+ :

$$\boxed{ClO^- + H_2O + 2e^- = Cl^- + 2HO^-}$$

L'ion I^- s'oxyde selon :

$$I^- + 3H_2O = IO_3{}^- + 6H^+ + 6e^-$$

qu'on équilibre en milieu basique :

$$\boxed{I^- + 6HO^- = IO_3{}^- + 3H_2O + 6e^-}$$

L'équation bilan s'écrit donc :

$$\boxed{3ClO^- + I^- = 3Cl^- + IO_3{}^-} \qquad (1)$$

On met du diode en large excès car on souhaite que le réactif limitant soit ClO^-

❑ **2** — A la fin de l'étape 2, on a en solution du I^-, du $IO_3{}^-$ et du Cl^- (qui n'a pas réagi). Or, à pH faible, I^- et $IO_3{}^-$ n'ont pas de domaine de prédominance commun. Ils réagissent ensemble pour former du I_2. Les demi-équations d'écrivent :

$$\begin{cases} 2I^- = I_2 + 2e^- \\ 2IO_3{}^- + 12H^+ + 10e^- + = I_2 + 6H_2O \end{cases}$$

et l'équation-bilan est :

$$\boxed{5I^- + IO_3{}^- + 6H^+ = 3I_2 + 3H_2O} \qquad (2)$$

Cette réaction est l'inverse d'une réaction de dismutation. On l'appelle média-mutation.

❑ **3** — Les demi-équations s'écrivent :

$$\begin{cases} I_2 + 2e^- = 2I^- \\ 2S_2O_{32}{}^- = S_4O_{62}{}^- + 2e^- \end{cases}$$

d'où la réaction de titrage :

$$\boxed{I_2 + 2S_2O_3{}^{2-} = 2I^- + S_4O_6{}^{2-}} \qquad (3)$$

La constante de cette réaction est déterminée par la formule :

$$\boxed{K = 10^{\frac{2}{0,06}(E^0(I_2/I^-) - E^0(S_4O_6{}^{2-}/S_2O_3{}^{2-}))} = 10^{15}}$$

❑ **4** — Pour répondre à ce genre de questions, je vous conseille :

—de numéroter les équations chimiques,
—de réfléchir dans votre tête avec des quantités de matières égales aux coefficients stoechiométriques.

D'après l'équation (1), 3 moles de ClO^- forment 1 mole de $IO_3{}^-$, donc :

$$n_{ClO^-,\text{init}} = 3n_{IO_3{}^-}$$

D'après l'équation (2), on a, de même :

$$n_{I_2} = 3n_{IO_3{}^-}$$

Enfin, à l'équivalence de l'équation (3) :

$$n_{S_2O_3{}^{2-}} = 2n_{I_2}$$

On en déduit :

$$n_{ClO^-,\text{init}} = \frac{n_{S_2O_3{}^{2-}}}{2}$$

$$\frac{c_0 V_{init}}{100} = \frac{C_1 V_{\text{eq}}}{2} \Longrightarrow \boxed{c_0 = 50\frac{C_1 V_{\text{eq}}}{V_{init}}}$$