

DS n°5

niveau moyen

PSI 2021/2022

Durée 4 heures - Calculatrices **autorisées**

I. — Transmission d'énergie électrique sans fil (E3A)

L'électricité de demain pourra-t-elle se passer de fils électriques? La nécessité actuelle de supprimer les fils et réduire l'encombrement, ou encore la multiplication des appareils électriques à faible consommation contribuent au développement des techniques et dispositifs de transmission d'énergie sans fil, inspirés des travaux pionniers de Nikola Tesla au début du XXe siècle. Les applications sont nombreuses et touchent divers domaines (voir figure 1) : de l'usage domestique (recharge d'appareils avec batteries, alimentation de petits appareils courants) au monde industriel (recharge de voitures électriques, applications diverses de la transmission de puissance, pour les trains par exemple), en passant par la médecine (apport d'énergie électrique aux implants, sans effectuer d'opérations chirurgicales lourdes).



FIGURE 1 – Quelques applications de la transmission d'énergie sans fil, de gauche à droite : recharge de téléphone portable, recharge sans fil d'une voiture Nissan Leaf[®], pacemaker.

Il existe aujourd'hui différents moyens de transmission de puissance sans fil. Citons notamment le couplage inductif non résonant en champ proche, le couplage inductif résonant en champ proche (voir figure 2) et le rayonnement en champ lointain (voir figure 3). Les caractéristiques, avantages et inconvénients de ces techniques sont donnés dans le tableau ci-après. Nous développerons dans cette partie certains aspects du couplage inductif, non résonant puis résonant.



FIGURE 2 – À gauche : couplage inductif non résonant en champ proche ; à droite : couplage inductif résonant en champ proche.

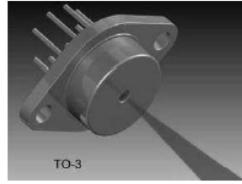


FIGURE 3 – Quelques dispositifs de rayonnement en champ lointain, de gauche à droite : antenne à forte directivité, diode laser, antenne micro-onde.

Mentionnons que le transfert de puissance sans fil par couplage résonant a été récemment mis en évidence par l'équipe de recherche dirigée par Marin Soljačić au *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), en réalisant une transmission de puissance de 60W avec une distance de 2m séparant les deux bobinages, permettant d'allumer une ampoule (voir figure 2). Ces travaux performants ont donné lieu à une publication dans la revue *Science* en 2007. C'est à cette occasion que le terme « *witricity* », contraction de *Wireless Electricity*, est apparu.

	Couplage non résonant	Couplage résonant	Rayonnement
Matériel nécessaire	bobines	bobines	antenne à grande directivité
Type de champ	magnétique	magnétique	électrique
Distance de transmission	faible	faible/moyenne	moyenne/grande
Puissance transmissible	faible	moyenne	moyenne/grande
Interactions avec le milieu	faible	faible	forte
Sécurité	élevée	élevée	potentiellement dangereux

TABLE 1 – Comparaison des différentes techniques.

On s'intéressera par la suite uniquement au couplage magnétique non résonant.

I.A. — Étude des bobines utilisées

Pour établir un couplage inductif non résonant entre une bobine émettrice et une bobine réceptrice, on peut utiliser des solénoïdes ou des bobines « plates » 2D (voir figure 4).



FIGURE 4 – Bobines utilisées.

Considérons tout d'abord le cas d'un solénoïde de longueur ℓ et d'axe de révolution Oz , comportant N spires circulaires jointives de rayon a , et parcourues par un courant d'intensité variable $i(t)$. On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) : on calcule le champ magnétique créé par des courants variables $i(t)$, comme en magnétostatique par le théorème d'Ampère.

□ 1 — Rappeler les équations locales de Maxwell relatives au champ magnétique \vec{B} . Comment se simplifient-elles dans l'ARQS?

□ 2 — Dans le cadre de l'ARQS, indiquer comment on passe de l'équation locale concernée au théorème d'Ampère.

On suppose dans la suite le solénoïde « infini » et on cherche à exprimer le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ en tout point M de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On admet que le champ magnétique est identiquement nul à l'extérieur du solénoïde.

□ 3 — Sous quelle(s) condition(s) l'approximation d'un solénoïde « infini » vous semble-t-elle légitime?

□ 4 — En invoquant des arguments de symétrie et d'invariance de la distribution de courants, déterminer la direction du champ $\vec{B}(M, t)$, ainsi que la (ou les) coordonnée(s) dont dépend(ent) son module.

□ 5 — En précisant le contour d'Ampère choisi, montrer tout d'abord que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde. En choisissant un second contour d'Ampère, déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en fonction de ℓ , N et $i(t)$.

Intéressons-nous à présent au cas d'une bobine « plate », constituée (pour simplifier) de N spires circulaires identiques, d'axe de révolution Oz et de rayon a , placées dans le plan $z = 0$ et parcourues par un courant d'intensité $i(t)$. On se place à nouveau dans le cadre de l'ARQS et on considère un point M de l'axe Oz , de cote $z > 0$.

□ 6 — Préciser, en justifiant votre réponse, la direction du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ au point M .

□ 7 — Que dire du plan d'équation $z = 0$ d'un point de vue des courants? Qu'en déduire d'un point de vue du champ magnétique? En déduire une relation simple entre $B_z(-z, t)$ et $B_z(z, t)$.

On donne l'expression du champ magnétique créé par la bobine :

$$B_z(z, t) = \frac{\mu_0 N i(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

□ 8 — Représenter l'allure de la fonction $B_z(z)$. Exprimer le champ magnétique maximal $B_{z,\max}$, et déterminer à quelle distance $z_{\frac{1}{2}}$ de la spire le champ magnétique vaut $B_{z,\max}/2$, en fonction de a .

On donne sur la figure 5 les cartes de champ du solénoïde et de la bobine « plate », simulées à l'aide du logiciel FEMM (Finite Element Method Magnetics).

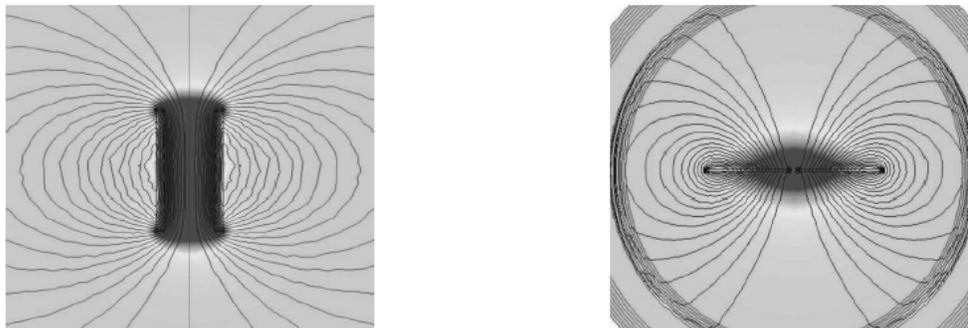


FIGURE 5 – Cartes de champ du solénoïde (à gauche) et de la bobine « plate » (à droite).

□ 9 — Justifier les symétries et/ou antisymétries observées sur chacune de ces cartes de champ.

□ 10 — Sur la carte de champ du solénoïde, on remarque que les lignes de champ se resserrent au sein du solénoïde et qu'elles y sont approximativement parallèles. Que peut-on déduire de ces observations topologiques? Quelle propriété, relative au flux du champ $\vec{B}(M, t)$, permet de le confirmer?

I.B. — Transfert de puissance : rendement de Yates

Modélisons à présent le transfert inductif de puissance entre deux bobines, comme celles représentées sur la figure 6.

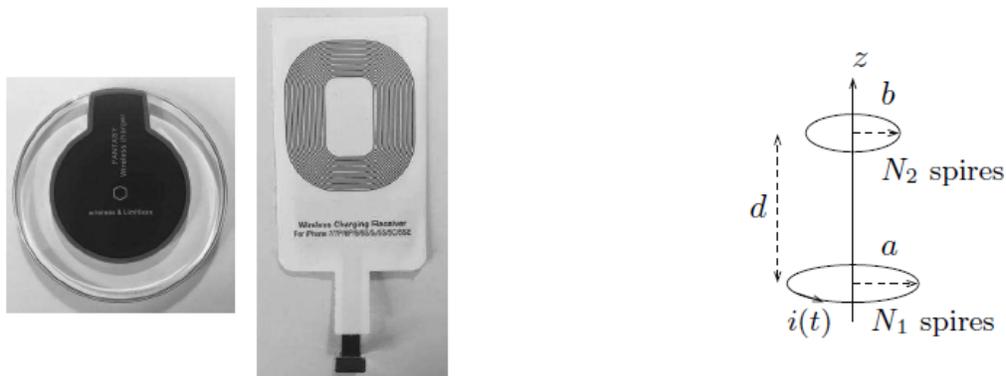


FIGURE 6 — À gauche : système de transmission classique (émetteur et récepteur) utilisé dans les chargeurs sans fil actuels. À droite : schéma et notations utilisés.

Une bobine émettrice « plate », de résistance électrique R_1 et d'inductance propre L_1 , comportant N_1 spires circulaires de rayon a , est parcourue par un courant d'intensité :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

imposé par un générateur (non représenté sur la figure 6).

□ 11 — Définir et exprimer la puissance instantanée reçue par la bobine émettrice de la part du générateur, notée $P_{\text{reçue}}$, en fonction de L_1, R_1 , de l'intensité $i(t)$ et de sa dérivée $\frac{di}{dt}$. En déduire la moyenne temporelle de cette puissance $\langle P_{\text{reçue}} \rangle$ en fonction de R_1 et I_0 .

Considérons également une bobine réceptrice « plate », de résistance électrique R_2 , d'inductance propre L_2 et comportant N_2 spires circulaires de rayon b , située à une distance d de la bobine émettrice. On cherche à définir et exprimer le rendement de transfert de puissance entre les deux bobines, dans le cas d'un alignement parfait. On rappelle l'expression du champ magnétique créé par la bobine émettrice en un point M de l'axe Oz :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

Pour simplifier, on suppose ce champ magnétique uniforme dans le plan de la bobine réceptrice.

□ 12 — Exprimer le flux Φ du champ magnétique créé par la bobine émettrice à travers la bobine réceptrice, en fonction de $i(t), a, b, d, N_1$ et N_2 .

□ 13 — Le courant $i(t)$ étant variable, il apparaît une force électromotrice (fem) $e(t)$ aux bornes de la bobine réceptrice. Après avoir nommé la loi utilisée, exprimer la fem $e(t)$ en fonction de $I_0, \omega, t, a, b, d, N_1$ et N_2 . On négligera le flux magnétique propre du circuit récepteur devant le flux extérieur.

□ 14 — En négligeant l'inductance propre L_2 de la bobine réceptrice, en déduire la puissance reçue par cette dernière de la part de la bobine émettrice, notée $P_{\text{géné}}$, puis sa moyenne temporelle $\langle P_{\text{géné}} \rangle$ en fonction de $I_0, \omega, a, b, d, N_1, N_2$ et R_2 .

On définit le rendement de transmission de puissance par le quotient :

$$\eta = \frac{\langle P_{\text{reçue}} \rangle}{\langle P_{\text{géné}} \rangle}$$

□ 15 — Montrer que le rendement peut se mettre sous la forme :

$$\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3}$$

avec k un coefficient sans dimension à expliciter. Ce résultat constitue la loi de Yates.

I.C. — Modélisation du couplage : inductance mutuelle

On propose dans cette sous-partie une modélisation plus générale du couplage magnétique, s'affranchissant des hypothèses faites dans la sous-partie précédente. Le couplage est quantifié par l'inductance mutuelle M entre les deux bobines, d'inductances propres respectives L_1 et L_2 (voir figure 7).

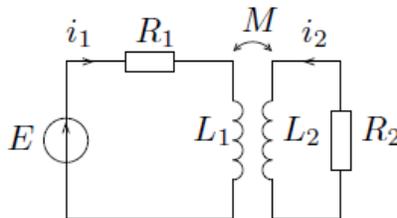


FIGURE 7 – Circuits couplés par mutuelle inductance.

□ 16 — Rappeler la définition de M , ainsi que sa dimension.

□ 17 — En appliquant la loi des mailles dans chacun des deux circuits, établir le système d'équations électriques couplées vérifiées par les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

□ 18 — Montrer que ce système d'équations conduit au bilan de puissance

$$Ei_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{dE_{\text{mag}}}{dt}$$

avec E_{mag} une quantité à exprimer en fonction de L_1, L_2, M, i_1 et i_2 . Interpréter ce bilan.

□ 19 — On pose la variable adimensionnée $x = i_1 / i_2$. Mettre E_{mag} sous la forme

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} i_2^2 P(x)$$

où $P(x)$ est un polynôme d'ordre 2 que l'on explicitera.

□ 20 — En admettant que E_{mag} est une quantité positive, montrer que l'inductance mutuelle vérifie une inégalité de la forme $M \leq M_{\text{max}}$. Exprimer son majorant M_{max} en fonction de L_1 et L_2 .

□ 21 — Connaissez-vous d'autres applications de tels circuits couplés par mutuelle induction dans les domaines de l'industrie et de la vie courante? Deux applications détaillées sont attendues.

I.D. — Résultats expérimentaux

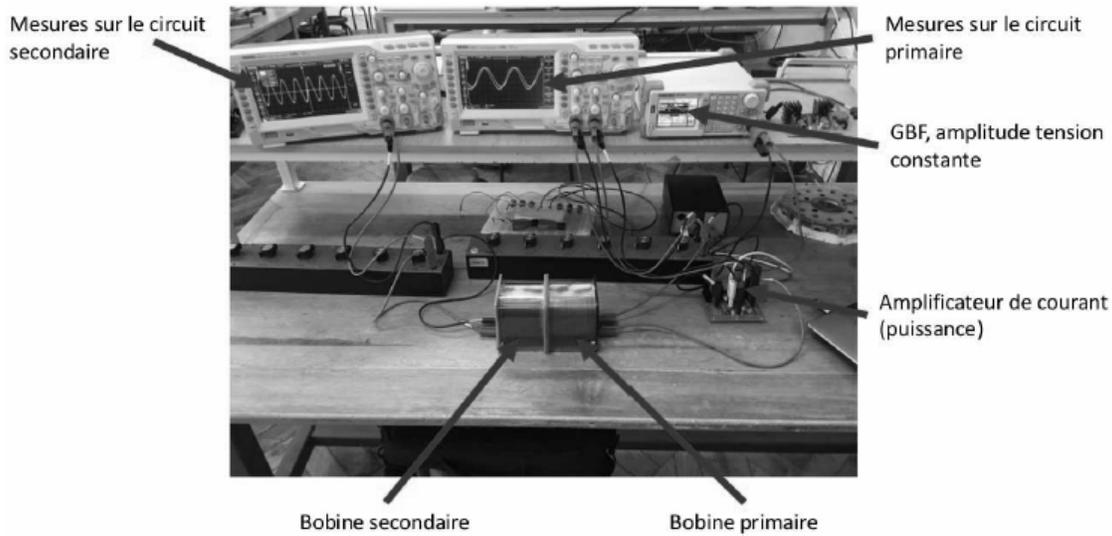


FIGURE 8 – Photographie légendée du montage expérimental.

On cherche à tester expérimentalement, à partir de matériel usuel de travaux pratiques (voir figure 8), la prédiction théorique de Yates obtenue à la question 16 :

$$\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3}$$

Un générateur basse fréquence (GBF), délivrant un signal sinusoïdal de fréquence f , alimente un circuit composé d'une bobine émettrice d'inductance $L = 0,86$ mH, dite « bobine primaire », et d'une résistance. Un amplificateur de courant permet d'augmenter la puissance fournie à la bobine émettrice. On place à une distance d de la bobine émettrice une bobine réceptrice identique, dite « bobine secondaire », mise en série avec une résistance. Deux oscilloscopes permettent de mesurer les puissances moyennes reçues par les bobines émettrice et réceptrice. Les bobines étant accolées, on étudie tout d'abord la variation du rendement η avec la fréquence f imposée par le GBF, tous les autres paramètres demeurant constants (voir figure 9).

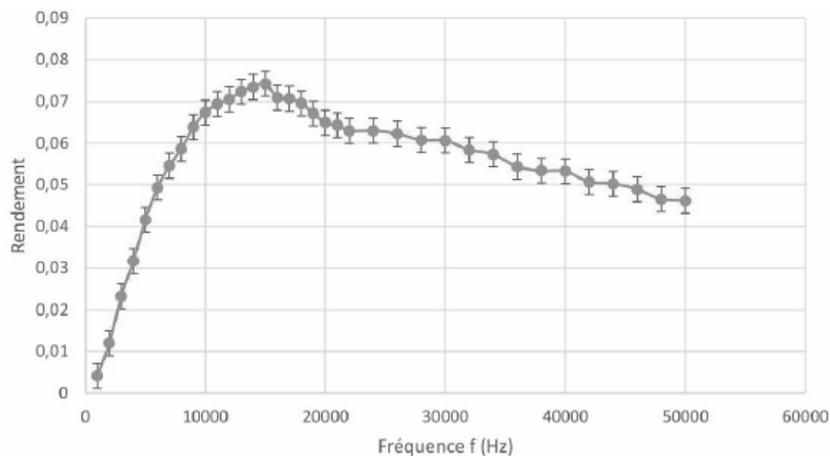


FIGURE 9 – Évolution du rendement en fonction de la fréquence.

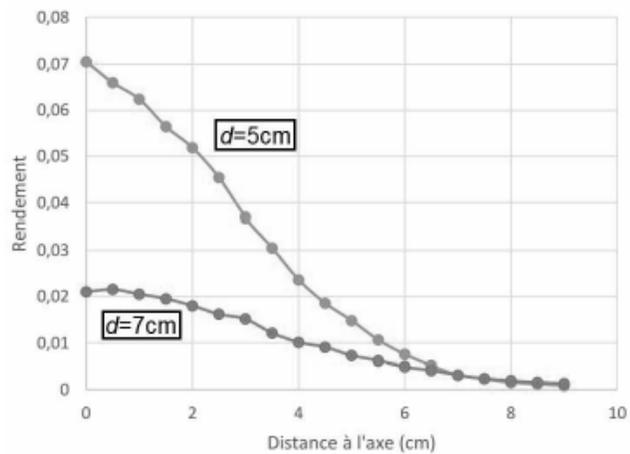
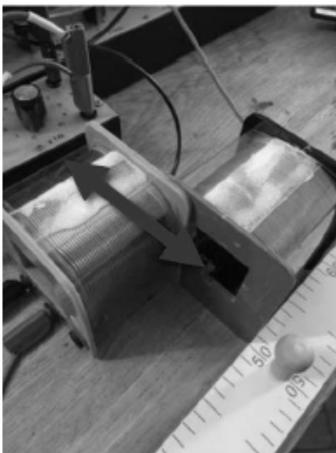
□ 22 — Estimer le rendement expérimental maximal η_{max} , ainsi que la fréquence f_{max} à laquelle celui-ci est atteint.

□ 23 — Quel comportement en fréquence pouvait-on prévoir par la loi théorique de Yates? Ce comportement est-il vérifié expérimentalement? On pourra distinguer le cas des basses et hautes fréquences.

En réalité, chaque bobine souffre d'effets capacitifs associés aux différents matériaux isolants séparant les spires. On propose de déterminer un ordre de grandeur de cette capacité parasite C_p .

□ 24 — Rappeler l'expression de la pulsation propre ω_0 d'un oscillateur électronique LC en fonction de L et C .

□ 25 — En supposant que le rendement soit maximal pour la pulsation ω_0 , en déduire la valeur de C_p . On cherche ensuite à sonder expérimentalement l'influence d'un désalignement des bobines sur le rendement. Les résultats sont présentés sur la figure 10.



□ 26 — Interpréter l'évolution observée. Justifier qualitativement que l'effondrement du rendement soit plus important lorsque d est petit. On sonde enfin l'influence de l'orientation relative des bobines sur le rendement. Les résultats sont reportés sur la figure 11.

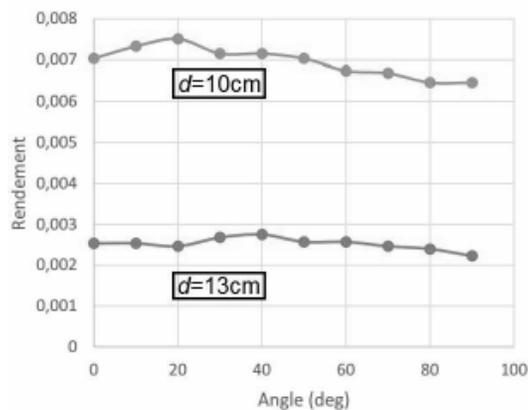


FIGURE 11 – Évolution du rendement en fonction de l'angle entre les bobines.

□ 27 — Commenter les résultats obtenus. Proposer une justification qualitative, en lien avec les cartes de champ représentées sur la figure 5, permettant de comprendre le contraste avec les résultats obtenus à la question précédente.

II. — Principe de fonctionnement d'un magnétomètre à vanne de flux (E3A)

On considère un solénoïde infini d'axe (Oz) comportant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I (voir figure 1). On note (r, θ, z) les coordonnées cylindriques d'un point M et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ les vecteurs unitaires de la base cylindrique.

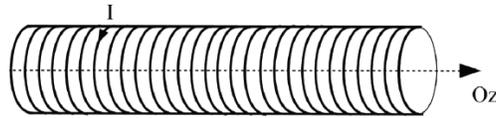


FIGURE 1 – Solénoïde infiniment long.

On rappelle que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde vaut $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z$.

II.A. — Bobine avec noyau en fer

On s'intéresse à l'influence d'un noyau ferromagnétique sur le comportement d'un solénoïde. Le document 1 rappelle quelques propriétés des matériaux ferromagnétiques.

□ 1 — Définir le champ coercitif et le champ rémanent d'un milieu ferromagnétique.

□ 2 — Expliquer la différence entre un milieu ferromagnétique dur et un milieu ferromagnétique doux. À quel type de matériau ferromagnétique la modélisation associée à la figure 3 est-elle adaptée? Comment obtenir expérimentalement la courbe (figure 2) du document 1?

Document 1. Matériaux ferromagnétiques :

Certains matériaux, dits ferromagnétiques, peuvent s'aimanter lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique et conserver une partie de ce magnétisme lorsque le champ est supprimé. Un matériau magnétique peut être caractérisé par la relation reliant l'excitation magnétique \vec{H} et le champ magnétique \vec{B} dans le matériau $B = f(H)$ où on note B et H les projections des champs \vec{B} et \vec{H} suivant la direction de l'excitation magnétique \vec{H} .

La figure 2 montre une courbe $B = f(H)$ typique pour un matériau ferromagnétique.

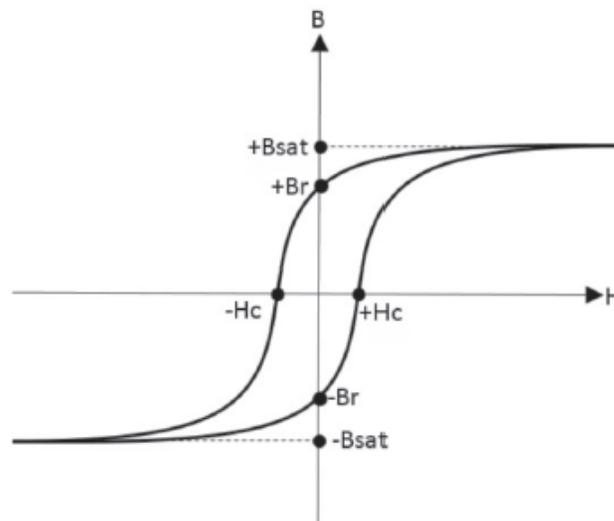


FIGURE 2 – Courbe $H = f(B)$ caractérisant un matériau ferromagnétique.

Dans la suite du problème, on modélise la courbe $B = f(H)$ par la figure 3. On constate que cette courbe présente une zone linéaire et une région correspondant à la saturation du matériau. Dans la zone linéaire, on a la relation $B = \mu_r \mu_0 H$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et μ_r la perméabilité relative du matériau ferromagnétique considéré.

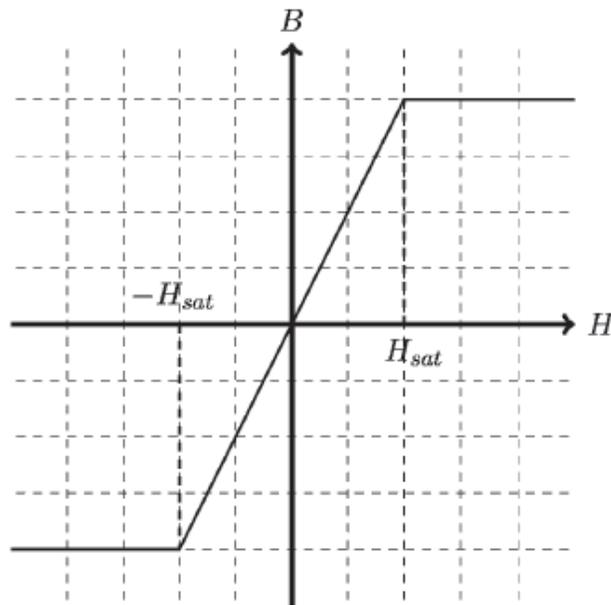


FIGURE 3 – Modélisation de la saturation magnétique.

On considère une bobine d'axe (Oz) formée de n spires par unité de longueur et parcourue par un courant i . Les spires sont enroulées autour d'un matériau ferromagnétique ayant la forme d'un barreau cylindrique (voir figure 4). On fait les hypothèses suivantes :

- Le dispositif est supposé être suffisamment long pour que les effets de bord puissent être négligés.
- Le champ magnétique créé par la bobine à l'intérieur du barreau est supposé uniforme et parallèle à l'axe (Oz) .
- Le champ magnétique à l'extérieur du barreau est supposé nul.

□ 3 — Déterminer l'expression de l'excitation magnétique $\vec{H}(M)$ en un point M à l'intérieur du barreau. En déduire l'expression du champ magnétique dans le barreau. On pourra utiliser les informations apportées par la figure 3.

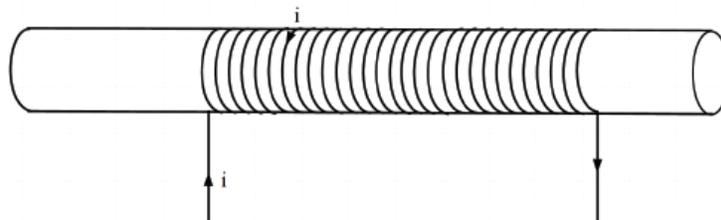
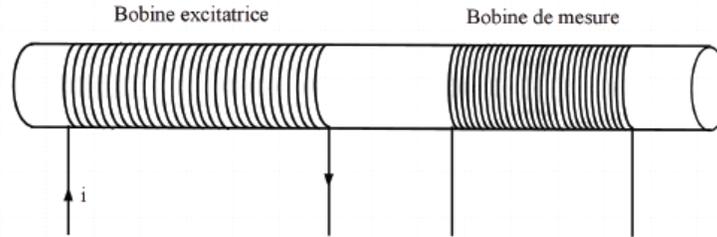


FIGURE 4 – Solénoïde avec noyau ferromagnétique.

On utilise une bobine de mesure d'axe (Oz) formée de N_s spires de surface S enroulées elles aussi autour du cylindre ferromagnétique de section S . On supposera que le courant $i(t)$ parcourant la bobine excitatrice

est sinusoïdal de pulsation ω et tel que $i(t) = I_m \sin(\omega t)$.



L'amplitude du courant I_m est supposée suffisamment importante pour amener le matériau ferromagnétique à saturation. On notera $e(t)$ la tension aux bornes de la bobine de mesure.

- 4 — Déterminer l'expression du flux magnétique Φ à travers une spire.
- 5 — Rappeler la loi de Lenz-Faraday. Quel phénomène physique traduit-elle?
- 6 — En déduire l'expression de la tension $e(t)$ aux bornes de la bobine de mesure en fonction de N_s , S et B . Discuter de la valeur de $e(t)$ selon que le noyau ferromagnétique est saturé ou non.

III. — Dosage d'une eau de Javel (Mines-Ponts)

Une eau de Javel est une solution basique supposée équimolaire de Cl^- et de ClO^- . On désire vérifier, à l'aide d'un dosage, la concentration c_0 en ClO^- ou Cl^- d'un produit commercial.

Rappels

On rappelle que le diiode est soluble dans l'eau en présence d'une quantité suffisante d'iodure de potassium et prend alors une couleur jaune brunâtre. Il forme en présence d'empois d'amidon un complexe de couleur bleue.

Protocole

- Étape 1 : on dilue d'un facteur 100 le produit commercial. On prélève ensuite un volume V_{init} de solution diluée.
 - Étape 2 : on ajoute de l'iodure de potassium (K^+ , I^-) en excès.
 - Étape 3 : on acidifie la solution en ajoutant quelques gouttes d'une solution d'acide chlorhydrique concentrée. La solution prend alors une couleur jaune brunâtre.
 - Étape 4 : on ajoute une faible quantité d'empois d'amidon pour que le dosage ne soit pas perturbé. La solution est alors de couleur bleue intense.
 - Étape 5 : on dose alors la solution par une solution de thiosulfate de sodium (2Na^+ , $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$) de concentration connue C_1 . On note V_{eq} le volume de thiosulfate versé à l'équivalence, repéré par le changement de couleur.
- 1 — Écrire l'équation bilan de la réaction chimique qui s'est produite lors de l'étape 2. On pourra au préalable tracer les diagrammes de prédominance des espèces contenant du chlore d'une part et des espèces contenant de l'iode d'autre part en milieu basique. Pourquoi faut-il mettre de l'iodure de potassium en excès?
 - 2 — Écrire l'équation bilan de la réaction chimique qui s'est produite lors de l'étape 3. Quel nom porte cette équation d'oxydo-réduction?

□ 3 — Écrire l'équation bilan de la réaction qui a lieu avec le thiosulfate de sodium. Déterminer la valeur numérique de sa constante d'équilibre.

□ 4 — Déterminer la concentration C_0 en fonction de V_{init} , V_{eq} et C_1 .

Données :

— Pour des valeurs de pH supérieures à 10, on a $E(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) \geq 1$ et $E(\text{IO}_3^-/\text{I}^-) \leq 0,6$.

— Pour des valeurs de pH très faibles, on a $E(\text{IO}_3^-/\text{I}_2) \geq 1$ et $E(\text{I}_2/\text{I}^-) \approx 0,6 \text{ V}$

— On donne $E^0(\text{I}_2/\text{I}^-) = 0,54 \text{ V}$ et $E^0(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,09 \text{ V}$