Correction TD n°20

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆ Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Transformateur

Adaptation d'impédance

La puissance reçue par la résistance R_2 vaut $P = u_2 i_2 = u_1 i_1$ avec les orientations des courants choisis (attention à l'orientation de i_2 !). Par ailleurs, on a $u_1 = \frac{R_2}{m^2} i_1$ et $i_1 = \frac{e}{R_1 + \frac{R_2}{m^2}}$. D'où :

$$\mathscr{P} = \frac{\frac{R_2}{m^2} e^2}{\left(R_1 + \frac{R_2}{m^2}\right)^2} = \frac{R_2 m^2 e^2}{(R_1 m^2 + R_2)^2}$$

La puissance est maximale quand $\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}m} = 0$. On trouve $m = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$.

Détermination des caractéristiques d'un transformateur⋆

1. Le transformateur délivre une tension secondaire de 24V en régime nominal sur charge résistive (facteur de puissance = 1), avec une puissance de 1,5 kW, soit donc $I_2 = P/U_2 = 62,5$ A. Attention à bien penser à calculer le facteur de puissance !
2. On a une chute de tension de 4% entre le fonctionnement à vide et nominal, dû à la résistance du bobinage, soit $\frac{U_{2,v} - U_{2,\text{Nominal}}}{U_{2,v}} = 0,04 \Rightarrow \frac{U_{2,\text{Nominal}}}{0.96} = 25V$.
3. Le rapport du nombre de spires est le rapport des fém induites à vide, soit $m = n_2/n_1 = e_2/e_1 = U_{2v}/U_1 = 6,58.10^{-2}$.
4. En régime nominal, $B_{\max} = 0,9$T. On calcule donc la fém induite au primaire, en considérant B uniforme sur la section droite et en appliquant la loi de Faraday :

$$u_1(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}(t) = n_1 S \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -n_1 S \omega B_{\max} \sin(\omega t)$$

L'expression de sa valeur efficace est :

$$U_1 = \frac{n_1 2\pi f S B_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow n_1 = \frac{\sqrt{2} U_1}{2\pi f S B_{\max}} = 1900\text{tours} \Leftrightarrow n_2 = 125\text{tours}$$

5. On applique le théorème d'Ampère pour le fonctionnement à vide, seul le primaire est parcouru par un courant :

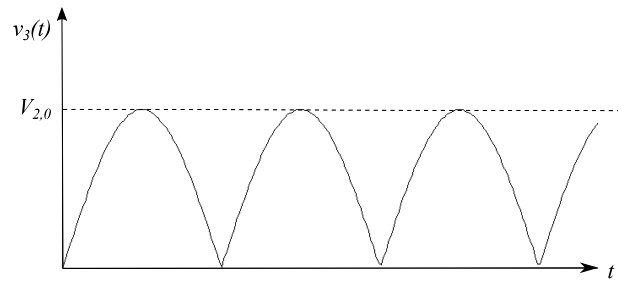
$$\oint \vec{H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = n_1 i_{1,v} \Rightarrow i_{1,v}(t) = \frac{H(t)\ell}{n_1} = \frac{B(t)\ell}{\sqrt{2}\mu_0 \mu_r n_1} \Rightarrow i_{i,v} = \frac{B_{\max}\ell}{\sqrt{2}\mu_0 \mu_r n_1} = 26\mu\text{A}$$

Ce courant, appelé courant magnétisant, est heureusement relativement faible devant les courants généralement utilisés pour alimenter le primaire.

Dimensionnement d'un transformateur⋆

1. D'après la relation du transformateur $V_{0,2} = m v_0$.

2. Après redressement, la courbe ressemble à :



3. Un filtre moyenneur est un filtre passe-bas qui ne laisse passer que la valeur moyenne d'un signal. Il faut donc que sa fréquence de coupure soit inférieure à la fréquence de la fondamentale de $v_3(t)$, qui est égale à la fréquence du signal lui-même. Le signal en sortie du redresseur ayant une fréquence $f = 2f_0 = 100$Hz, on pourra prendre $f_c = 10$ Hz.

4. La valeur moyenne du signal redressé, de période $T = \frac{T_0}{2}$ vaut :

$$v_4 = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} V_{0,2}\sin(2\pi f_0 t)\mathrm{d}t = \frac{2V_{0,2}}{T_0}[-\frac{\cos(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0}]_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{2V_{0,2}}{\pi} = \frac{2mV_0}{\pi}$$

5. On en déduit :

$$m = \frac{\pi v_4}{2V_0} = 0,0785$$

Puissance consommée par un groupe de dipôles passifs⋆

On utilise simplement la formule démontrée dans le cours : $\mathscr{P} = \mathrm{Re}(\underline{Z})I_{\text{eff}}^2$. On en déduit :

$$\mathscr{P} = \left(r + \frac{R}{1+(RC\omega)^2}\right)I_{\text{eff}}^2$$

Relèvement d'un facteur de puissance

1. On a simplement $I_{eff} = \frac{P}{U_{eff}\cos\varphi} = \boxed{65\text{A}}$.
2. On a $P = \mathrm{Re}(\underline{Z})I_{eff}^2 = RI_{eff}^2$ soit $R = \frac{P}{I_{eff}^2} = \boxed{2,4\Omega}$.
3. On a $\underline{Z} = R + jL\omega$, soit $\boxed{\tan\varphi = \frac{L\omega}{R}}$. On en déduit :

$$\boxed{L = \frac{R\tan\varphi}{2\pi f} = 7,8\text{mH}}$$

4. L'admittance de l'ensemble vaut :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R+jL\omega} + jC\omega$$

Sachant que $\varphi' = \arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{1}{\underline{Y}}\right) = -\arg(\underline{Y})$, on a $\tan\varphi' = -\frac{\mathrm{Im}(\underline{Y})}{\mathrm{Re}(\underline{Y})}$. Il nous faut donc exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de l'admittance :

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2+(L\omega)^2} + j\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2+(L\omega)^2}\right)$$

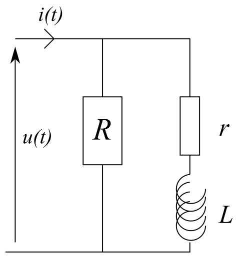
d'où :

$$\boxed{\tan\varphi' = -\frac{C\omega}{R}(R^2+(L\omega)^2) + \frac{L\omega}{R}}$$

5. On a $\varphi' = 26°$. En isolant C, on trouve $\boxed{C = 350\mu\text{F}}$.

1.1 Séchoir électrique⋆

1. Le schéma du montage est :



2. En mode froid, le sèche cheveu se réduit à la bobine réelle qui consomme une puissance $P_{r-L} = P_F = 520$W. En mode I et II, la puissance moyenne consommée par l'appareil vaut :

$$P = P_{r-L} + P_R = P_F + \frac{U_{eff}^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{U_{eff}^2}{P-P_F}}$$

L'application numérique donne $R_I = 23\Omega$ et $R_{II} = 5,6\Omega$.

3. Il y a une coquille sur le sujet (mélange entre R et r). On a :

$$P_F = P_{r-L} = \mathrm{Re}(\underline{Y}_{r-L})U_{eff}^2 = \frac{r}{r^2+(L\omega)^2}U_{eff}^2$$

D'où :

$$r^2 + (L\omega)^2 = \frac{230^2}{520}r = (102\Omega)r$$

4. On sait que $\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{\mathrm{Re}(\underline{Z})}$. Mais on a aussi $\tan\varphi = -\frac{\mathrm{Im}(\underline{Y})}{\mathrm{Re}(\underline{Y})}$. L'utilisation de cette dernière formule permet d'aller un peu plus vite. En effet :

$$\underline{Y} = \frac{1}{r+jL\omega} + \frac{1}{R} = \frac{R(r-jL\omega)+r^2+(L\omega)^2}{R(r^2+(L\omega)^2)}$$

On en déduit immédiatement la formule demandée.

5. On a :

$$\frac{\tan\varphi_{II}}{\tan\varphi_I} = \frac{R_{II}}{R_I} \times \frac{R_I r + 102r}{R_{II} r + 102r} = \frac{R_{II}}{R_I} \times \frac{R_I + 102}{R_{II} + 102} = 0,21$$

On en déduit $\boxed{\varphi_I = 80°}$. Par ailleurs $\tan\varphi_F = \frac{L\omega}{r}$ d'où :

$$\frac{\tan\varphi_{II}}{\tan\varphi_F} = R_{II} \times \frac{r}{R_{II} r + 102r} = \frac{R_{II}}{R_{II} + 102} = 0,052$$

On en déduit $\boxed{\varphi_F = 87°}$.

Adaptation d'impédance⋆

1. La puissance moyenne consommée se calcule via la formule du cours, en fonction du courant efficace :

$$\mathscr{P} = \mathrm{Re}(\underline{Z}) I_{\text{eff}}^2$$

Exprimons l'intensité du courant efficace en fonction des grandeurs du circuit :

$$e(t) = ((R + R_g) + j(X + X_g))i(t)$$

conduisant à :

$$I_{\text{eff}} = \frac{\frac{E}{\sqrt{2}}}{(R+R_g)^2 + (X+X_g)^2}$$

Donc la puissance moyenne consommée en fonction des données de l'énoncé vaut :

$$\mathscr{P} = \frac{RE^2}{(R+R_g)^2 + (X+X_g)^2}$$

2. R_g et X_g sont fixés car liés au générateur. Si on fixe R, il faut choisir $X = -X_g$ pour avoir la puissance maximale (on minimise le dénominateur).
3. Cette condition étant vérifiée, il faut donc maximiser $\frac{R}{(R+R_g)^2}$ On trouve sans peine $R = R_g$ en annulant la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ avec $x = R/R_g$. Ainsi $\underline{Z} = R_g - jX_g$ rend la puissance maximale, c'est à dire encore $\underline{Z} = \underline{Z}_g^\star$