

TD n°21 Correction

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

- ★ Exercice niveau CCP
- Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
- ◇ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Contacteurs

Electroaimant★

Un exercice extrêmement proche du cours.

- On a $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi_{\text{bob}}I = \frac{\Phi I}{2N}$.
- On utilise le calcul habituel mais ici, comme on nous donne les longueurs du matériau et la valeur de μ_r , il nous faut garder tous les termes au dénominateur :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\frac{\ell_{\text{fer}}}{\mu_r} + 2e}$$

- On utilise la définition de l'inductance :

$$L = \frac{\Phi_{\text{bob}}}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{\frac{\ell_{\text{fer}}}{\mu_r} + 2e}$$

- On suppose que le système est à l'équilibre, on a donc :

$$F = F_{\text{em}} = \left(\frac{\partial E_{\text{mag}}}{\partial e} \right)_I = \frac{\mu_0 N^2 S I^2}{\left(\frac{\ell_{\text{fer}}}{\mu_r} + 2e \right)^2}$$

- Il faut que l'intensité dépasse la valeur d'équilibre :

$$I > I_{\text{eq}} = \left(\frac{\ell_{\text{fer}}}{\mu_r} + 2e \right)^2 \times \frac{1}{N} \sqrt{\frac{F}{\mu_0 S N}} = 5,98 \text{ A}$$

- L'intérêt du ressort est qu'il permet à la pièce mobile de revenir à sa position initiale en l'absence de courant (sinon, du fait de l'aimantation résiduelle, elle peut rester collée).

Oscillateur magnétique●

- Le champ magnétique, avec les approximations habituelles, vaut $B = \frac{\mu_0 NI}{\delta}$. Le volume de l'entrefer quand $x > 0$ vaut $V = e\delta x$. On en déduit :

$$E_{\text{mag}} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 e x}{\delta} \Rightarrow \vec{F}_{\text{em}} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 e}{\delta} \vec{u}_x$$

- Le champ magnétique ne change pas. Par contre, le volume de l'entrefer ne s'exprime plus de la même manière puisque $V = e\delta(2e - x)$. On en déduit :

$$\vec{F}_{\text{em}} = -\frac{\mu_0 N^2 I^2 e}{\delta} \vec{u}_x$$

- Tant que $x < e$, la force est dirigée suivant $\vec{u}_x$, la pièce se déplace vers la droite. Lorsque $x > e$, la force change de direction, la pièce freine, s'arrête puis se déplace vers la gauche. Lorsque on a de nouveau $x < e$, la force change de nouveau de sens et ainsi de suite. Le mouvement est bien périodique.
- Il faut intégrer l'équation du mouvement dans les deux cas.

- Pour $e/4 < x < e$, en utilisant les conditions initiales :

$$m\ddot{x}(t) = F \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2m} F t^2 + \frac{e}{4}$$

Le mouvement est donc uniformément accéléré. La force change de sens au bout d'un temps :

$$t_1 = \sqrt{\frac{3em}{2F}}$$

La masse a alors une vitesse $v_1 = \frac{F}{m} t_1$.

- Pour $x > e$, l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x}(t) = -F \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2m}F(t-t_1)^2 + v_1t + e$$

La pièce s'arrête au bout d'un temps $t_2 = 2t_1$. Pour $t > t_2$, elle repart dans l'autre sens.

On pourrait continuer les calculs pour déterminer le temps à partir duquel la pièce retrouve sa position initiale mais c'est inutile. La situation étant parfaitement réversible, ce temps vaudra aussi $2t_1$. On en déduit la période du mouvement :

$$T = 4t_1 = 4\sqrt{\frac{3em}{F}}$$

Machines synchrones

Traction d'un véhicule électrique par une machine synchrone★

1. Paramètres de la machine

- En régime permanent, $\Omega = \omega$.
- On reprendra les schéma du cours !
- ϕ représente le flux du champ rotorique à travers une phase du stator. Il dépend du courant rotorique et de la géométrie de la machine.
- Si le rotor est entraîné par un moteur auxiliaire, la machine fonctionne en alternateur. Par ailleurs, à vide, on a $i(t) = 0$, d'où $u(t) = e(t) = -E(t)$. Donc $E = 120V$ et $\phi = 0,19 = E/\omega$ Wb.
- En court-circuit, $u(t) = 0$. La loi des mailles en complexe s'écrit : $jL\omega I_{cc} = -E$. D'où, en passant au module : $L = \frac{E}{\omega I_{cc}} = \frac{\phi}{I_{cc}} = 1,6$ mH.

2. Traction du véhicule

- Si la vitesse est constante, le moteur doit compenser les frottements et la perte de puissance due au poids. Le théorème de la puissance cinétique donne :

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 = P_{em} + P_{poids} + P_{frottements}$$

La puissance du poids vaut $P_{poids} = \vec{P} \cdot \vec{v} = -mgv \sin \alpha < 0$. On en déduit $P_{em} = 14$ kW. En supposant que la puissance perdue à cause des frottements de l'air et des pertes dans les transmissions mécaniques à cette vitesse est de l'ordre de 3 kW, estimer la puissance que doit développer le moteur afin de maintenir la vitesse du véhicule constante.

- En régime permanent de rotation à la vitesse ω , on rappelle que l'angle d'autopilotage ψ représente le déphasage de $\underline{E}$ par rapport à $\underline{I}$. On étudie un régime nominal de rotation du moteur à la vitesse $\Omega_N = 6,0 \cdot 10^3$ tr.min⁻¹. Lors de ce régime, la commande de l'onduleur impose $\psi = -\pi/3$ et le moteur doit développer une puissance mécanique nominale de $P_m = \Gamma_N \Omega_N = 15$ kW où Γ_N désigne le couple électromagnétique nominal.
- La puissance électromagnétique moyenne reçue par le moteur vaut $P = 2EI \cos \psi$ (le 2 vient du fait qu'il y a deux phases). Comme on a négligé toute perte, on a $P = P_N$. On en déduit $I = \frac{P_N}{2E \cos \psi} = 126A$.
- On peut utiliser les complexes, ou encore mieux, utiliser le diagramme de Fresnel. On trouve $U = 64V$
- La puissance réellement utilisée vaut $P_u = \Gamma_u \omega = 14,4W$. Le rendement vaut donc $\eta = \frac{P_u}{P_{em}} = 96\%$.

3. Freinage du véhicule

- Dans cette configuration, le poids est moteur : $P_{poids} = mgv \sin \alpha$. On en déduit $P_{em} = -mgv \sin \alpha - P_{frotts} = -8kW$. La puissance est négative car le moteur freine le train (c'est le fameux "frein moteur").
- La puissance électromagnétique étant négative, la machine fonctionne en alternateur. La puissance électromagnétique fournie par la machine est bien entendu égale à la puissance mécanique reçue par la machine. On a de nouveau : $I = \frac{|P_{em}|}{2E \cos \psi} = 67A$.
- On effectue le même calcul que précédemment pour trouver $U = 70V$.

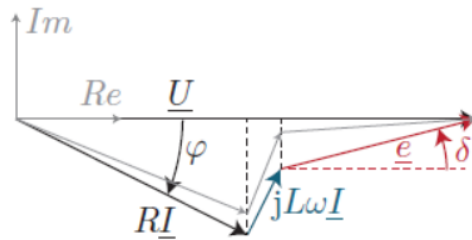
Alternateur connecté à un réseau de distribution

- Elle est positive à condition que $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. À puissance fixée, plus $\cos \varphi$ est important, moins le courant appelé est grand, à tension également imposée. Cela signifie moins de pertes en ligne.

2.

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t) + e(t) \Rightarrow U = RIe^{-j\varphi} + L\omega Ie^{j(\frac{\pi}{2}-\varphi)} + Ee^{j\delta}$$

- Le schéma de Fresnel est le suivant :



4. Avec $\cos \varphi = 1$, $i(t)$ est en phase avec $u(t)$. On obtient alors géométriquement :

$$I_r = \frac{E}{K} = \frac{1}{K} \sqrt{U^2 + \left(\frac{L\omega P}{U} \right)^2}, \quad \tan \delta = \frac{L\omega I}{U} = \frac{L\omega P}{U^2}$$

2. Machines à courant continu

Identification d'un moteur à courant continu*

1. Il s'agit d'un couple résistant. Il est donc négatif. Le TMC donne :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C - \alpha \Omega \Rightarrow J p \omega(p) = C(p) - \alpha \Omega(p) \Rightarrow \boxed{T_m(p) = \frac{1}{Jp + \alpha}}$$

2. En régime permanent, le TMC donne $\alpha = \frac{C}{\Omega} = 0,1 \text{ N.m.s}$ (en prenant n'importe quelle valeur du tableau !). Si on prend un couple magnétique nulle, le TMC donne :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = -\alpha \Omega \Rightarrow \Omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{\alpha t}{J}}$$

On atteint la moitié de la valeur initiale en une temps $T_0 = \ln 2 \frac{J}{\alpha} \Rightarrow J = 1,5 \text{ kg.m}^2$. T_0 ne dépend pas de ω_0 .

3. On peut évaluer la valeur de la vitesse de rotation au bout d'un temps de 42s avec le modèle précédent. On trouve :

$$\omega(t = 42s) = \omega_0 \times \exp\left(-\frac{4,2}{1,5}\right) = 88 \text{ tr.min}^{-1}$$

Le modèle du couple résistant n'est donc pas réaliste. On prendra plutôt : $C_r = -C_{r0} - \alpha \Omega$. Ce couple traduit mieux le fait qu'il y a tout de même une

résistance à la rotation même à vitesse nulle. La vitesse de rotation vérifie alors l'équation différentielle :

$$J \frac{d\Omega}{dt}(t) + \alpha \Omega(t) = -C_{r0} \Rightarrow \Omega(t) = -\frac{C_{r0}}{\alpha} + \left(\omega_0 + \frac{C_{r0}}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha t}{J}}$$

Sachant que $\Omega(t = T_1) = 0$, on en déduit :

$$\boxed{C_{r0} = \frac{\omega_0 \alpha}{e^{-\frac{\alpha T_1}{J}} - 1} = 0,97 \text{ N.m}}$$

Moteur à excitation série*

- Comme $\Gamma = \Phi_0 I$, on aurait tendance à dire que Γ est proportionnel à I . Or Φ_0 représente le flux du champ statorique dans le circuit rotorique. Le champ statorique étant traversé par le courant I (c'est la particularité du moteur à excitation série) on a $\Gamma \propto I^2$. De plus, $E = \Phi_0 \Omega$, donc $\boxed{\Gamma \propto 1/\Omega^2}$.
- S'il fonctionne à vide, il n'y a pas de couple de charge, donc il s'emballe car $1/\Omega^2 \rightarrow 0$ donc $\Omega \rightarrow \infty$ (jusqu'à ce qu'il y ait des limitations bien sûr).
- Dans la mesure où on ne considère pas de pertes, donc de résistances des bobinages, on a $U = E$. On en déduit simplement :

$$a = \Gamma \Omega^2 = (\Gamma \Omega) \Omega = EI \Omega = UI \Omega = 1,9 \cdot 10^5 \text{ N.m.rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

4. En régime permanent, couple utile et couple résistant sont égaux, donc

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{a}{\Gamma_{\text{res}}}} = 1310 \text{ tours/min}}$$

5. Le couple résistant se met sous la forme $\Gamma_r = \alpha \Omega^2$ avec $\alpha = \frac{15}{\left(\frac{1500}{60} \times 2\pi\right)^2} = 6,08 \cdot 10^{-4} \text{ N.m.s}^2 \cdot \text{rad}^{-2}$. En égalant les deux couples, on en déduit :

$$\boxed{\Omega = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} = 1270 \text{ tours/min}}$$