TD n°22 Correction

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆ Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts.
◇ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Hacheur à stockage inductif

1. Dans ce genre de question, il faut faire attention aux indications de l'énoncé. Ici, on indique que le courant dans la bobine est toujours positif. La bobine ne peut donc pas être en circuit ouvert (elle joue un rôle analogue à une source de courant). Les deux interrupteurs ne peuvent donc être ouverts en même temps. Par ailleurs, les deux interrupteurs ne peuvent être fermés en même temps sinon les deux générateurs seront en parallèle.
2. - Pour $t \in]kT, kT+\alpha T[$:
   $$\begin{cases} u_L(t) &= u \\ u_1(t) &= 0 \\ u_2(t) &= -u-u' \end{cases} \quad \begin{cases} i_L(t) &= \frac{u}{L}t + i_{\text{min}} \\ i_1(t) &= i_L(t) \\ i_2(t) &= 0 \end{cases}$$
   - Pour $t \in]kT+\alpha T, (k+1)T[$:
   $$\begin{cases} u_L(t) &= -u' \\ u_1(t) &= u+u' \\ u_2(t) &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} i_L(t) &= -\frac{u'}{L}(t-\alpha T) + i_{\text{max}} \\ i_1(t) &= 0 \\ i_2(t) &= i_L(t) \end{cases}$$

   On peut en déduire le tracer des chronogrammes. Par ailleurs, on a :
   $$\langle u_L(t) \rangle = \alpha u - (1-\alpha)u' \Rightarrow \boxed{u' = \frac{\alpha}{1-\alpha}u}$$
3. - Pour $t \in]kT, kT+\alpha T[$:
   $$\begin{cases} u_1(t) &= 0 \text{ et } i_1(t) > 0 \\ u_2(t) &< 0 \text{ et } i_2(t) = 0 \end{cases}$$
   - Pour $t \in]kT+\alpha T, (k+1)T[$:
   $$\begin{cases} u_1(t) &> 0 \text{ et } i_1(t) = 0 \\ u_2(t) &= 0 \text{ et } i_2(t) > 0 \end{cases}$$

   K_1 est donc un transistor et K_2 une diode.
4. On utilise les chronogrammes pour calculer les différentes valeurs moyennes :
   $$I_L = \frac{i_{\text{max}} + i_{\text{min}}}{2} \quad I_1 = \alpha I_L \quad I_2 = (1-\alpha) I_L$$
5. On a $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$. Pour $\alpha = 1$, on ne transfère aucune puissance dans la source u' et le courant y est nul.
6. Puissance moyenne cédée par la source de tension : $P = \langle u i_1(t) \rangle = u I_1$. Puissance moyenne consommée par la source u' : $P' = u' I_2 = u' \frac{1-\alpha}{\alpha} I_1 = u I_1 = P$. On retrouve que le circuit n'a pas de pertes.
7. Si l'intensité peut changer de signe et devenir négative, il faut choisir des interrupteurs qui laissent passer le courant dans les deux sens comme une association diode-transistor tête-bèche.

Alimentation à découpage⋆

1. L'association en série de E avec L permet d'avoir une source de courant en entrée, et en sortie une sortie de tension. On a donc la structure d'un hacheur parallèle (ou survolteur) vu en cours. Déterminons $i_L(t)$:
   - sur $[0; \alpha T]$, $u_L(t) = E$ d'où : $i_L(t) = \frac{E}{L}t + I^-$ avec I^- valeur min en régime permanent ;

- sur $[\alpha T, T]$, $u_L(t) = E - E_0$ d'où $i_L(t) = I + +\frac{E-E_0}{L}(t - \alpha T)$ avec I^+ valeur max en régime permanent ;

Comme on a un fonctionnement périodique, on doit vérifier que la courbe descend entre αT et T d'autant qu'elle est montée entre 0 et αT. On en déduit $\boxed{E_0 = \frac{E}{1-\alpha}}$

2. Il faut choisir $\alpha = 1/2$. La variation de courant vaut simplement :

$$\Delta i_L = \frac{E}{L}\frac{T}{2} \Rightarrow \boxed{L \geq \frac{ET}{2\Delta i_L} = 5\text{mH}}$$

3. Il suffit de déterminer la puissance moyenne apportée par la source E :

$$P = \langle E i_L \rangle \Rightarrow \boxed{\langle i_L \rangle = \frac{P}{E} = 4A}$$

d'où $I^- = 3{,}9$A et $I^+ = 4,1$ A. Concernant les fonctions de commutation, on trouve que K est une transistor vers le bas et K' une diode vers la droite

Régime transitoire d'un hacheur série

Attention ! On est en régime transitoire et non plus en régime permanent ! La valeur moyenne de la dérivée d'une fonction n'est donc plus nulle car aucune fonction n'est périodique !.

On suuposera le transistor fermé sur $[0, \alpha T]$ et ouvert sinon. Ce sera l'inverse pour la diode :

1. (a) La tension aux bornes de la bobine vérifie $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u_s - E_R$ avec u_s la tension aux bornes de la diode, valant E_G entre $[0, \alpha T]$, et 0 sinon. Ainsi en intégrant entre t_0 et $t_0 + T$:

$$Li(t_0 + T) - Li(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} u_s(t)\mathrm{d}t - E_R T = \alpha E_G T - E_R T$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t_0 + T) = i_0 + \frac{\alpha E_G - E_R}{L} T}$$

Cette variation ne dépend pas de t_0 et donc de n.

(b) On en déduit la valeur moyenne demandée sur une période :

$$\boxed{\langle \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \rangle = \frac{\alpha E_G - E_R}{L}}$$

2. Le TMC appliqué au rotor de la machine donne :

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}(t) = \Gamma_{em}(t) - f\Omega(t) = \Phi_0 i(t) - f\Omega(t)$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$J\ddot{\Omega}(t) = \Phi_0 \frac{\alpha E_G - E_R(t)}{L} - f\dot{\Omega}(t) = \frac{\Phi_0 \alpha E_G - \Phi_0^2 \Omega(t)}{L} - f\dot{\Omega}(t)$$

On obtient finalement une équation du second ordre :

$$\boxed{J\ddot{\Omega}(t) + f\dot{\Omega}(t) + \frac{\Phi_0^2}{L}\Omega(t) = \frac{\Phi_0 \alpha E_G}{L}}$$

Le régime qui permet d'atteindre le régime permanent le plus rapidement possible est le <u>régime critique</u>. On en déduit :

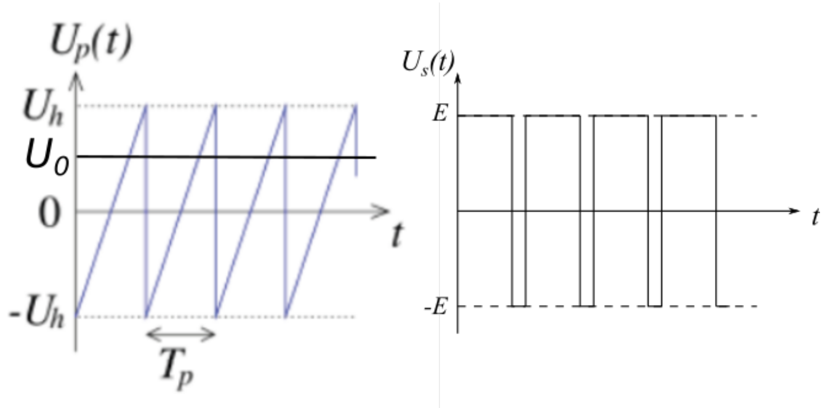
$$Q = \frac{J}{f}\sqrt{\frac{\Phi_0^2}{JL}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{4J\Phi_0^2}{f^2}}$$

Onduleur⋆

1. Une source de tension (courant) parfaite est telle que la tension (resp. le courant) à ses bornes est constante quelle que soit la valeur du courant (resp. de la tension) qui la traverse.
2. On relie une source de tension à une source de courant, on ne peut donc pas court-circuiter la source de tension, ni laisser en circuit ouvert une source de courant. D'où :

	K_1	K_2	K_3	K_4
$U_{cm} > 0$	fermé	ouvert	ouvert	fermé
$U_{cm} < 0$	ouvert	fermé	fermé	ouvert

3. L'ALI est en régime saturé car il n'y a pas de rétroaction négative.
4. Si $u_p(t) > U_0$, $u_s(t) = -E$. Si $u_p(t) < U_0$, $u_s(t) = E$.



5. On trouve simplement

$$< u_s >= \frac{Et_1 - E(T - t_1)}{T} = (2\alpha - 1)E$$

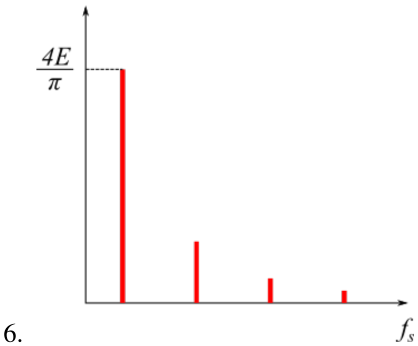
Pour exprimer t_1, on utilise le fait que la rampe d'équation $U_p(t) = -U_h + \frac{2U_h}{T_p}t$ croise la droite horizontale U_0 à la date t_1. On en déduit :

$$t_1 = T_p \frac{U_0 + U_h}{2U_h} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{U_0}{U_h}\right)}$$

Ainsi, la valeur moyenne de u_s vaut :

$$\boxed{< u_s >= \frac{U_0}{U_h} E}$$

Pour avoir une valeur moyenne nulle, on prendra bien entendu $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$ soit $\boxed{U_0 = 0}$.

6. 

Ce spectre n'est pas convenable car il contient plus d'une harmonique (signal périodique non sinusoïdal). L'ajout sur le réseau d'harmoniques pourrait endommager d'éventuels appareils prévus pour 50 Hz uniquement, et occasionner des pertes.

7. Le courant dans la charge vérifie l'équation :

$$\begin{cases} \tau \frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}(t) + i_s(t) & = \frac{E}{R} \; t \in [0, \frac{T_p}{2}] \\ \tau \frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}(t) + i_s(t) & = -\frac{E}{R} \; t \in [\frac{T_p}{2}, T_p] \end{cases}$$

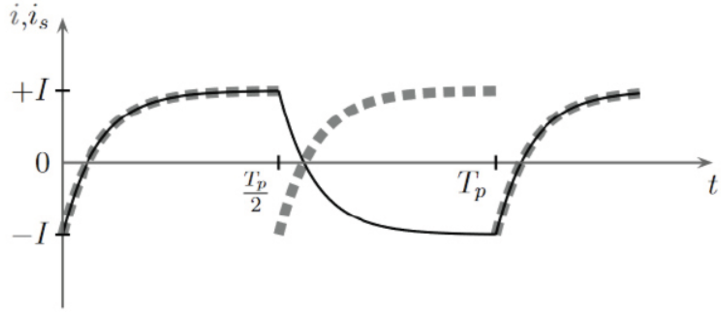
On en déduit les solutions :

$$\begin{cases} i_s(t) & = -\left(\frac{E}{R} + I\right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \quad t \in [0, \frac{T_p}{2}] \\ i_s(t) & = \left(\frac{E}{R} + I\right) \mathrm{e}^{-\frac{t - \frac{T_p}{2}}{\tau}} - \frac{E}{R} \quad t \in [\frac{T_p}{2}, T_p] \end{cases}$$

A $T_p/2$, les deux expressions doivent être égales à I, d'où, après calcul :

$$\boxed{I = \frac{E}{R} \tanh \frac{T_p}{4\tau}}$$

8. Le courant traversant le générateur vaut $i(t) = |i_s(t)|$. Les chronogrammes sont de la forme :



9. Le courant $i(t)$ changeant de signe sur chaque intervalle, il nous faut des interrupteurs pouvant faire passer le courant dans les deux sens. C'est pourquoi on a besoin d'une association transistor-diode tête-bèche.
10. La fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{R}{R + jL\omega}$$

On en déduit :

$$G(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\ , \quad \Phi(\omega) = -\arctan\frac{L\omega}{R}$$

11. Chaque harmonique voit son amplitude et son déphasage modifiés. On obtient :

$$U_s(t) = \sum_n \frac{2ER}{n\pi\sqrt{R^2 + (L\omega n)^2}}[1 - (-1)^n]\sin(n\omega t - \arctan\frac{Ln\omega}{R})$$

En prenant une inductance appropriée telle que $R << nL\Omega$, le signal de sortie se simplifie en :

$$U_s(t) = \sum_n \frac{2ER}{\pi L\omega n^2}[1 - (-1)^n]\sin\left(n\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

On voit qu'après filtrage, le spectre décroît en $\frac{1}{n^2}$. Les harmoniques de fréquences plus élevées que la fondamentale sont donc plus atténuées.

Chargeur de pile•

1. (a) On a déjà $u(t) = mV\sin\omega t$, puis avec le pont de diode, $u_R(t) = mV|\sin\omega t|$. La valeur moyenne se calcule simplement sur une demi-période (tracer l'allure de la courbe pour en être convaincu) :

$$< u_R(t) >= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\omega t \mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{2}mV}{\pi} = 12,4\mathrm{V}$$

(b) On en déduit $< i >= \frac{<u_R>}{R} = 77,6$ mA. Comme $i_D(t)$ est égal à $i(t)$ sur une demi période on a : $< i_D(t) >= \frac{<i>}{2} = 38,8$ mA. Pour calculer les valeurs efficaces, on fera très attention : les signaux n'étant pas sinusoïdaux, on ne peut pas faire un quelconque lien entre l'amplitude et la valeur efficace ! Il faut donc calculer :

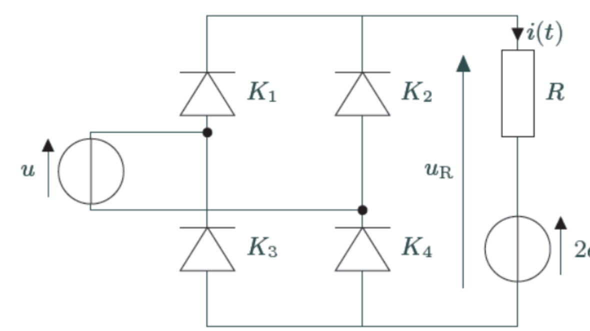
$$I^2 =< i(t)^2 >= \frac{m^2V^2}{R^2} \Rightarrow \boxed{I = \frac{mV}{R}}$$

De même pour I_D :

$$I_D^2 = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i^2(t)\mathrm{d}t = \frac{I^2}{2} \Rightarrow\Rightarrow \boxed{I_D = \frac{I}{\sqrt{2}}}$$

(c) La puissance moyenne consommée vaut : $P = R < i^2(t) >= \frac{m^2V^2}{R}$.

2. Effectuons un schéma du montage :



(a) Pour tracer ces deux chronogrammes, Il faut reprendre l'ensemble de l'analyse du fonctionnement du système, du fait de l'ajout des générateurs de tension.

- Supposons que K_1 et K_4 soient passants. Dans ce cas $u_R(t) = u(t)$. Ceci est possible si et seulement si :

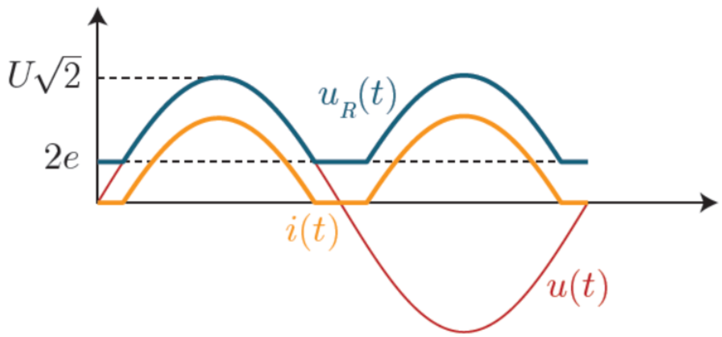
$$i(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{u(t) - 2e}{R} > 0 \Leftrightarrow \boxed{u(t) > 2e}$$

- Supposons que K_2 et K_3 soient passants. Dans ce cas $u_R(t) = -u(t)$. Ceci est possible si et seulement si :

$$i(t) < 0 \Leftrightarrow \frac{-u(t) - 2e}{R} > 0 \Leftrightarrow \boxed{u(t) > -2e}$$

- Si K_1 et K_3 sont passantes, alors $u_R = 0$ ce qui implique $i = -\frac{2e}{R} < 0$. Ceci est absurde donc cette situation n'est pas possible. On obtient la même chose pour K_2 et K_4 passants.
- Si toutes les diodes sont fermées, $i = 0$ et $\boxed{u_R = 2e}$. Ceci est donc valable pour $-2e < u(t) < 2e$.

Les courbes de $u_R(t)$ et et de $i(t)$ ressemblent donc aux courbes ci-dessous :



(b) Le calcul de la valeur moyenne donne :

$$< i >= \frac{2U\sqrt{2}}{\pi R}\left(1 + \frac{e^2}{U^2}\right) - \frac{2e}{R}, \quad < u_R >= \frac{2U\sqrt{2}}{\pi R}\left(1 + \frac{e^2}{U^2}\right)$$

(c) La puissance moyenne consommée par les piles vaut :

$$< P >= 2e < i >= 0,17\text{W}$$

et le temps de charge vaut $t = \frac{2Q}{<i>}$ =4h35.