TD n°24 Equation de d'Alembert unidimensionnelle

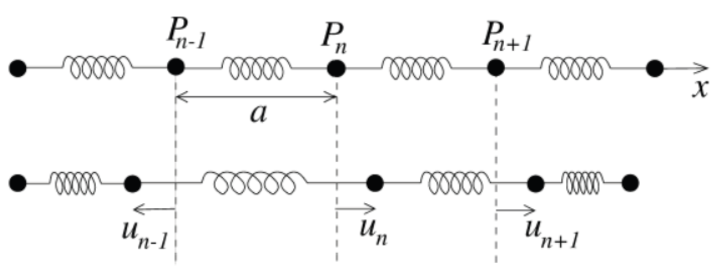
ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
$\star$Exercice niveau CCP
$\bullet$ Exercice niveau Centrale/Mines
$\diamond$ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Etablissement d'une équation de d'Alembert

1.1 Chaîne infinie d'oscillateurs$\star$

On considère une chaîne rectiligne infinie de points matériels P_n identiques, de masse m, de position $x_n(t)$, reliés par des ressorts identiques de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k.



À l'équilibre, les points sont régulièrement espacés : $x_{n,eq} = na$. On note $u_n(t)$ le déplacement du point P_n par rapport à sa position d'équilibre. On a $x_n(t) = x_{n,eq} + u_n(t)$. Attention $u_n(t)$ est une grandeur algébrique !

1. En appliquant proprement le principe fondamental de la dynamique au point matériel P_n, établir l'équation reliant $\ddot{u}_n(t)$, $u_n(t)$, $u_{n-1}(t)$ et $u_{n+1}(t)$.
2. On considère le cas où la distance a entre deux points successifs est très petite devant l'échelle caractéristique de variation des u_n. Dans ce cas, on note simplement la position de la masse P_n par son abscisse x et on notera son déplacement par rapport à l'équilibre $u_n(t) = u(x_n,t) = u(x,t)$. De la même façon on aura $u_{n+1}(t) = u(x+a,t)$ et $u_{n-1}(t) = u(x-a,t)$. En effectuant des développements limités en $\frac{a}{x}$, montrer que $u(x,t)$ vérifie une équation de D'Alembert.
3. En déduire la vitesse de propagation des ondes dans la chaîne, et le type d'onde qui se propage (transverse ou longitudinale).

1.2 Ondes de compression et ondes de torsion dans un solide$\star$

On considère une poutre cylindrique d'axe Ox, de section S, de longueur au repos ℓ_0 de masse volumique μ.

1. Quand on tire sur les extrémités de la poutre, celle-ci s'allonge d'une longueur $\Delta\ell$. Pour de faibles déformations, l'allongement est proportionnel à la force et on définit le module d'Young E par $\dfrac{F}{S} = E\varepsilon$, où $\varepsilon = \dfrac{\Delta\ell}{\ell_0}$ est l'allongement relatif de la poutre. Le déplacement longitudinal du point d'abscisse x à l'instant t est noté $u(x,t)$. On considère une tranche élémentaire de poutre d'épaisseur dx.

(a) Exprimer $\varepsilon(x,t)$ en fonction de $u(x,t)$.

(b) En appliquant la loi de la quantité de mouvement, montrer que le déplacement longitudinal $u(x,t)$ suit une équation de D'Alembert. En déduire la vitesse de propagation c_P des ondes de compression dans cette poutre. On obtient numériquement $c_P = 5,15$ km.s^{-1}.

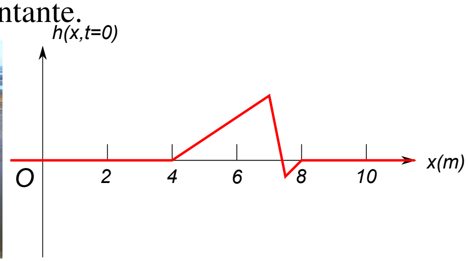
2. Cette poutre peut également se déformer en tournant autour de l'axe Ox. On admettra qu'une tranche de longueur infinitésimale dx possède un moment d'inertie d$J = j$dx par rapport à Ox et que le couple exercé sur la tranche par la partie gauche de la poutre est $\Gamma(x,t) = -\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,t)$ où $\alpha(x,t)$ est l'angle de torsion à l'abscisse x. γ est le coefficient de torsion linéique de la poutre.

(a) Établir l'équation de propagation d'une onde de torsion le long de la poutre. En déduire l'expression de célérité c_S des ondes de torsion. L'application numérique donne $c_S = 3,20$ km.s^{-1}

2. Ondes progressives

2.1 Mascaret⋆

Un mascaret est une vague solitaire remontant un fleuve au voisinage de son estuaire, et provoquée par une interaction entre son écoulement et la marée montante.



On considère ici un mascaret se déplaçant à la vitesse de $c = 2$ m.s^{-1} le long d'un fleuve rectiligne et on définit un axe Ox dans la direction et le sens de sa propagation. A $t = 0$, le profil de niveau du mascaret a l'allure ci-contre :

1. Faire un schéma du profil de niveau du fleuve à $t = 2s$.
2. Un surfeur attend avec sa planche à l'abscisse $x_0 = 10$m. Tracer l'évolution de la hauteur de la vague en x_0 en fonction du temps.
3. En réalité, l'onde se déforme car la vitesse de propagation augmente avec la profondeur ($v = \sqrt{gh}$) (*i.e* le milieu est dispersif). Comment évolue le profil de la vague ?

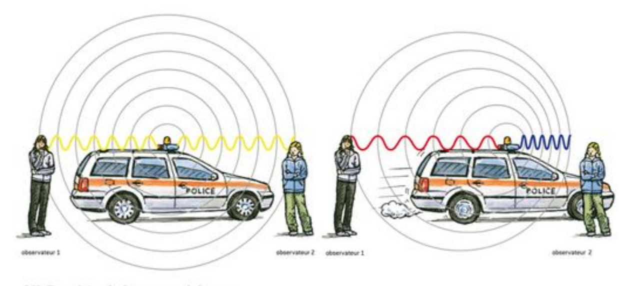
2.2 Séisme⋆

Un séisme produit deux types d'ondes sismiques : les ondes P longitudinales, qui se propagent avec une célérité c_P et les ondes S, transversales, qui se propagent avec la célérité $c_S < c_P$.

1. Lors d'une séisme, on commencer par détecter les premières à l'instant de date t_P et les secondes à l'instant de date t_S. Montrer qu'on peut en déduire, connaissant c_P et c_S, la distance D entre le foyer du séisme et l'appareil, ainsi que la date de début du séisme.

2. Pour un séisme, on mesure les distances D_1, D_2 et D_3 entre le foyer de celui-ci et trois stations de mesures. Sans faire de calcul, montrer que cette information permet de localiser le foyer du séisme à l'intérieur de la Terre. Quel autre système fonctionne sur ce même principe ?

2.3 Effet doppler⋆



1. Une source émet un signal périodique de période T et de célérité c. La source s'éloigne de l'observateur à une vitesse $v < c$. Quelle est la période T_{obs} du signal reçu par l'observateur ? Exprimer la fréquence f_{Obs} perçue en fonction de la fréquence f émise.

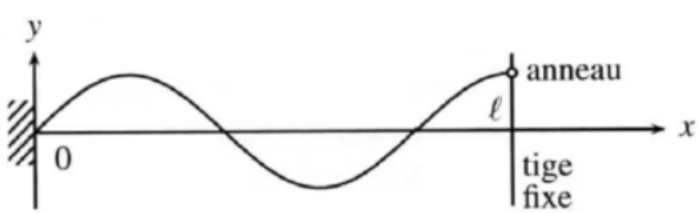
2. Expliquer pourquoi le son émis par un véhicule qui s'éloigne paraît plus grave que le son émis par le même véhicule à l'arrêt.

3. On connaît bien les longueurs d'onde émises ou absorbées par l'hydrogène, qui est le constituant principal de l'univers. Les galaxies, essentiellement constituées d'hydrogène, ont ce spectre, mais décalé vers le rouge, et ce décalage est d'autant plus marqué que la galaxie est éloignée de nous. Que peut-en en conclure ?

3. Influence des conditions aux limites

3.1 Modes propres d'une corde avec une extrémité libre•

Une corde est attachée à une de ses extrémités. Sa seconde extrémité est libre de se mouvoir sur un anneau qui coulisse sans frotter sur une tige. Le présence de la tige permet de tendre la corde sous une tension T. L'anneau est de masse quasi nulle.



1. Quelles sont les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = \ell$?
2. Quels sont les modes propres de cette corde ?

3.2 Réflexion et transmission sur une discontinuité⋆

On considère une corde très longue, composée de deux tronçons, l'un de masse linéique μ_1 pour $x < 0$, l'autre de masse linéique μ_2 pour $x > 0$. La tension est T. On suppose qu'une masse m est placée en $x = 0$. Du côté $x < 0$ arrive une onde incidente : $y_i(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$, il se forme alors une onde réfléchie $y_r(x,t) = rf\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$ du côté $x < 0$ et une onde transmise $y_t(x,t) = \tau f\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$ où r et τ sont les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

— En supposant que la masse ne bouge pas en $x = 0$, exprimer deux relations satisfaites par ces ondes en $x = 0$ et en déduire l'expression de r et de τ. Entre quelles limites ces deux coefficients peuvent-ils varier ? Discuter ces cas suivant la valeur du coefficient $\alpha = \sqrt{\frac{mu_2}{\mu_1}}$.

3.3 Corde avec masse au milieu•

On considère une corde de longueur $2L$ et de masse linéique μ. Elle est tendue sous une tension T. La corde est fixée à ses deux extrémités. On note $y(x,t)$ le déplacement transversal de la corde.

1. Retrouver l'équation de d'Alembert pour cette corde en précisant les hypothèses.
2. On donne :

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx - \varphi)\cos(\omega t)$$

Montrer que les valeurs possibles de k sont quantifiées et exprimer le fondamental.

3. On accroche une masse m au milieu de la corde. On note $y_1(x,t)$ la vibration de la corde pour $0 < x < L$ et $y_2(x,t)$ la vibration pour $L < x < 2L$. $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ vérifient l'équation de d'Alembert. Trouver deux relations liant les deux fonctions $y_1(L,t)$ et $y_2(L,t)$.

4. On définit une solution stationnaire :

$$y_1(t) = y_0 \sin(kX)\cos(\omega t)$$

Montrer que les conditions aux limites permettent d'exprimer une condition sur K .

3.4 Résonance sur une corde vibrante en présence d'un champ magnétique⋆

On étudie les petits mouvements dans la direction Oz d'une corde métallique de longueur L, fixée en ses deux extrémités d'abscisse $x = 0$ et $x = L$. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $I = I_0 \cos(\omega t)$ et plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\vec{u}_y$. On note F la tension de la corde et μ sa masse linéique.

1. Montrer que le déplacement $z(x,t)$ d'un point de la corde est solution de :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$$

où c et A sont des constantes à exprimer en fonction des données.

2. En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme $z(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$ Déterminer C pour $\omega \neq \frac{\pi c}{L}$. Que se passe-t-il lorsque ω tend vers $\frac{\pi c}{L}$?

3.5 Câble court-circuité

On étudie une onde incidente, progressive et harmonique, qui se propage dans un câble coaxial infini, dans le sens des x croissants. En $x = 0$ est branchée une résistance, de même valeur que l'impédance caractéristique Z_c du câble. Cette résistance, qui modifie le milieu de propagation, donne naissance à une onde transmise et une onde réfléchie.

1. On s'intéresse à l'onde de courant dans la partie $x < 0$. Montrer que cette onde "voit" en $x = 0$ une impédance équivalente Z_1 qui s'exprime très simplement en fonction de Z_c.
2. Définir et calculer le coefficient de réflexion en intensité de l'onde en $x = 0$.
3. On place sur le câble précédent un court-circuit en parallèle à l'abscisse $x = \ell$. Quelle est la forme de l'onde de courant entre les abscisses $x = 0$ et $x = \ell$? On calculera explicitement l'expression de l'intensité du courant et on montrera qu'elle représente une onde stationnaire.
4. Montrer qu'il existe une valeur minimale ℓ_0 de ℓ telle que le courant dans la partie $x > 0$ du câble s'annule en $x = 0$. On exprimera ℓ_0 en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde de courant dans le câble.
5. En déduire alors le coefficient de réflexion en courant et la forme de l'onde dans la partie $x < 0$ du câble.

3.6 Étude énergétique d'une ligne bifilaire sans perte

1. Établir une équation de conservation de l'énergie pour la ligne bifilaire sans perte, de la forme

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

où ε est une densité linéique d'énergie et où p est une grandeur à définir.

2. On considère une onde progressive selon les x croissants dans la ligne bifilaire d'impédance caractéristique Z_c qui se réfléchit sur une impédance terminale Z_0. Définir un coefficient de réflexion en puissance et déterminer son expression.