Correction TD n°24

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

1. Etablissement de l'équation d'onde

Chaîne infinie d'oscillateurs

1. Pour répondre à la question, on sera rigoureux dans les notations et on retiendra que $\boxed{\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{ressort}\to\text{masse}}}$.
   Appliquons le principe fondamendal de la dynamique à {la masse P_n} repérée par $X_n(t) = na + u_n(t)$.
   $$\begin{aligned} m\ddot{X}_n(t) &= +k(X_{n+1}(t) - X_n(t) - \ell_0) - k(X_n(t) - X_{n-1}(t) - \ell_0) \\ &= k(u_{n+1}(t) - u_n(t) + a - \ell_0) - k(u_n(t) - u_{n-1}(t) + a - \ell_0) \end{aligned}$$
   D'où :
   $$\boxed{m\ddot{u}_n(t) = k(u_{n+1}(t) - u_n(t)) - k(u_n(t) - u_{n-1}(t)}\,)$$
   Remarque : a n'est pas forcément égal à ℓ_0.
2. L'équation précédent se réécrit :
   $$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = k(u(x+a,t) - u(x,t)) - k(u(x,t) - u(x-a,t))$$
   En utilisant un développement de Taylor-Young à l'ordre 2, et sachant que $x \pm a$ est situé au voisinage de x :
   $$u(x \pm a, t) \approx u(x,t) \pm a\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$
   On en déduit :
   $$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = ka^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$
   soit l'équation de d'Alembert avec $\boxed{c^2 = \frac{ka^2}{m}}$. Remarque : on fait exactement l'opération inverse en informatique lorsqu'on passe de l'équation d'onde "continue" décrite avec la variable réelle x à l'équation d'onde discrète décrite avec la variable entière n.

Ondes de compression et de torsion dans un solide⋆

1. (a) $\varepsilon(x,t)$ désigne l'allongement relatif de la portion de poutre comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$. Cet allongement vaut :
   $$\varepsilon(x,t) = \frac{x + \mathrm{d}x + u(x+\mathrm{d}x,t) - (x + u(x,t))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$
   (b) On applique le principe fondamental de la dynamique à {la portion de poutre comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$}. On néglige le poids de la portion. Les seules forces qui s'appliquent sont les tensions exercées par les parties droite et gauche de la poutre sur le système. En raisonnant comme pour la corde vibrante, on obtient :
   $$\begin{aligned} \mathrm{d}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\vec{u}_x &= \vec{F}_d + \vec{F}_g \\ \mathrm{d}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= F(x+\mathrm{d}x,t) - F(x,t) \\ \mu S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \\ \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$
   On en déduit :
   $$\boxed{c_P^2 = \frac{E}{\mu}}$$
   Remarque : ces ondes de compressions sont des ondes **longitudinales**.
2. On applique la loi du moment cinétique scalaire au même système de moment d'inertie $\mathrm{d}J$, par rapport à l'axe (Ox). Cette tranche est tordue par la partie de la poutre située à sa gauche et tordue par la partie de poutre située à sa droite.

En utilisant le principe des actions réciproques :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}J\frac{\partial \omega}{\partial t}(x,t) &= \Gamma_g + \Gamma_d \\
J\mathrm{d}x\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(x,t) &= \Gamma(x,t) - \Gamma(x+\mathrm{d}x,t) \\
J\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x,t)
\end{aligned}$$

d'où l'équation d'onde :

$$\boxed{J\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(x,t) = \gamma\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}(x,t)}$$

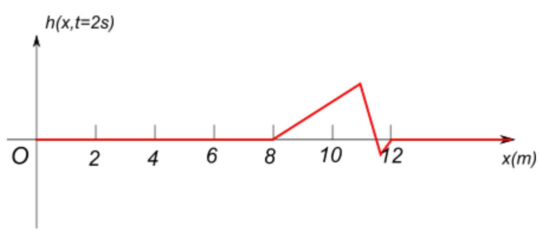
La vitesse des ondes de torsion vaut $\boxed{c_s = \sqrt{\frac{\gamma}{J}}}$. A noter que J désigne ici le moment d'inertie linéique de la poutre qui s'exprime en kg.m.

3. Les ondes de compression bien sûr.

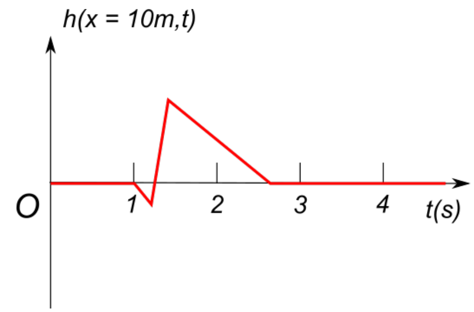
Ondes progressives

Mascaret⋆

1. A $t = 2$ s, la vague s'est décalée vers la droite de 4m :

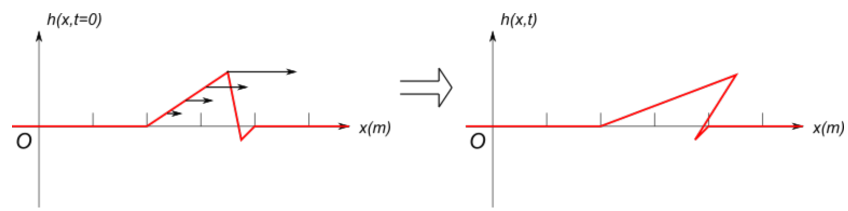


2. Le profil de l'eau en x_0 est représenté ci-dessous :



Notez que l'abscisse désigne maintenant le temps : on se place à une position x_0 fixe et on mesure la hauteur d'eau avec un chronomètre.

3. Le front de l'onde se raidit. On a un exemple typique de propagation dans un milieu *dispersif*



Séisme⋆

1. Soit t la date du début du séisme. On a :

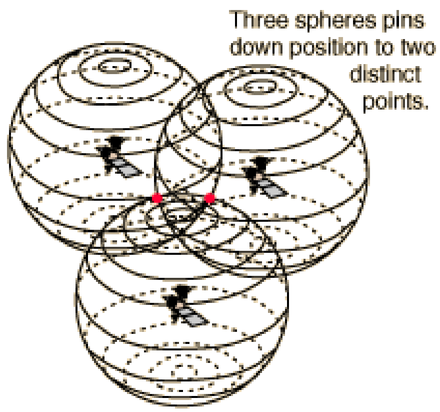
$$\begin{cases} D &= c_p(t_p - t) \\ D &= c_s(t_s - t) \end{cases} \Longleftrightarrow c_s(t_s - t) = c_p(t_p - t) \Longleftrightarrow t = \frac{c_p t_p - c_s t_s}{c_p - c_s}$$

On en déduit :

$$D = c_p(t - t_p) = \frac{c_p c_s(t_s - t_p)}{c_p - c_s}$$

2. Les points situés à une distance D_i d'une station de mesure sont situés sur une sphère de rayon D_i. Le foyer du séisme se situe donc à l'intersection de trois sphères de centre M_1, M_2 et M_3 (la position des trois stations de mesure) et de rayon D_1, D_2 et D_3. Cette intersection est constituée de 2 points. Un seul de ces points est situé à l'intérieur de la Terre. C'est le foyer du séisme.

Le principe de la géolocalisation par GPS fonctionne sur le même principe :



Effet Doppler⋆

1. Supposons que la source émette des *bips* (impulsions) régulières avec une période T. A $t = 0$, le premier *bip* est émis et on suppose que la source et le récepteur sont confondus. A $t = T$, le second *bip* est émis par la source qui est maintenant à la distance vT de l'émetteur. Ce second *bip* sera reçu à la date $T + \frac{vT}{c}$ car il faut tenir compte du temps que met l'onde pour se propager sur la distance source-récepteur. Pour le récepteur, la période du signal sera donc :

$$T_{\text{obs}} = T\left(1 + \frac{v}{c}\right) \Rightarrow \boxed{f_{\text{obs}} = \frac{f}{1 + \frac{v}{c}}}$$

2. On voit que $f_{\text{obs}} < f$.
3. Si les longeurs d'onde sont décalées vers le rouge, cela veut dire que les fréquences mesurées sont plus faibles que les fréquences théoriques. Cela signifie que les étoiles et galaxies s'éloignent de nous.C'est la preuve principale de l'expansion actuelle de l'univers.

Influence des conditions aux limites

Corde avec masse au milieu

1. Hypothèses : corde infinement souple et quasi inextensible. Poids de la corde négligé. Déformations faibles $|\alpha(x,t)| << 1$.
2. On trouve bien entendu $\varphi = 0$ et :

$$k_n = \frac{n\pi}{2L} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{4L}$$

Le mode fondamental s'écrit :

$$y_1(t) = y_0 \sin(k_1 x)\cos(2\pi f_1 t)$$

3. La continuité de la corde impose nécessairement :

$$y_1(L,t) = y_2(L,t)$$

Le PFD appliqué à { la masse m } donne, en négligeant son poids (précision qui aurait dû être rajoutée dans l'énoncé) :

$$m\vec{a} = \vec{T}_d + \vec{T}_g$$

La projection de cette équation sur l'axe vertical donne :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2}(L,t) = T_0\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}(L,t) - \frac{\partial y_1}{\partial x}(L,t)\right)$$

4. On définit une solution stationnaire (incomplète dans le sujet proposé) :

$$\begin{cases} y_1(x,t) = y_0 \sin(kx)\cos(\omega t) & \forall x \in [0,L] \\ y_2(x,t) = y_0 \sin(k(2L-x))\cos\omega t) & \forall x \in [L,2L] \end{cases}$$

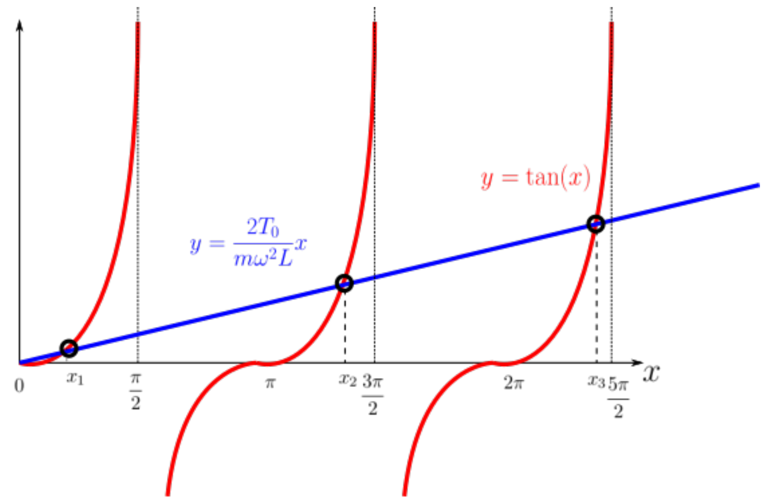
Cette solution est compatible avec les conditions aux limites ($y_1(0,t) = 0, y_2(2L,t) = 0$) et avec la continuité de la corde en $x = L$. Par ailleurs, en substituant dans le PFD on obtient :

$$-m\omega^2 y_0 \sin(kL)\cos(\omega t) = T_0(-ky_0\cos(kL)\cos\omega t) - y_0 k\cos(kL)\cos(\omega t))$$
$$m\omega^2 \sin(kL) = T_0(k\cos(kL) + k\cos(kL)$$

D'où la relation :

$$\boxed{\tan(kL) = \frac{2T_0}{m\omega^2}k}$$

Les valeurs de k vérifiant cette équation se déterminent graphiquement, plaçant en abscisse la grandeur adimensionnée $x = kL$.



On peut commenter deux cas particuliers :

— Si $m \to \infty$, la droite bleue a une pente nulle. On retrouve les modes propres d'une corde de longueur L :

$$x_n = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

ce qui est normal car la masse se comporte comme un noeud et empêche toute vibration.

— Si $m \to 0$, la masse n'influence pas le mouvement de la corde. La droite bleue a une pente qui tend vers l'infinie. On retrouve bien les modes propres d'une corde de longueur 2L :

$$x_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} \Rightarrow k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

Réflexion et transmission sur une discontinuité⋆

Il faut avant tout comprendre que :

$$y(x,t) = \begin{cases} y_i(x,t) + y_r(x,t) & \forall x < 0 \\ y_t(x,t) & \forall x > 0 \end{cases}$$

La première condition aux limites en $x = 0$ est que la hauteur de la corde est une grandeur continue :

$$y(0^-,t) = y(0^+,t) \Rightarrow y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t) \ \ \forall t$$
$$\Rightarrow \boxed{1 + r = \tau}$$

La deuxième condition est donnée par l'application du principe fondamental de la dynamique à la masse m immobile :

$$\vec{0} = \vec{T}(0^+,t) - \vec{T}(0^-,t)$$

En projetant suivant $\vec{u}_y$ comme dans le cours, on tombe rapidement sur :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0^-,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0^+,t)$$

ce qui implique :

$$\boxed{\frac{r-1}{v_1} = -\frac{\tau}{v_2}}$$

On a donc deux équations et deux inconnus. Après calcul, on obtient :

$$\boxed{r = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} \quad t = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}}$$

On retrouvera ces expressions pour la réflexion et la transmisson d'une onde sonore.

Résonance sur une corde vibrante en présence d'un champ magnétique⋆

1. Il faut prendre en compte la force de Laplace qui s'exerce sur un petit morceau de corde :

$$\mathrm{d}\vec{F} = I(t)\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} I(t)\mathrm{d}x \\ 0 \\ I(t)\mathrm{d}z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \sin\frac{\pi x}{L} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I(t)B_0 \sin\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}z \\ 0 \\ I(t)B_0 \sin\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

Le PFD appliqué au morceau de corde donne :

$$\begin{cases} 0 & = \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) - I(t)B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\alpha(x,t) \\ \mu\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) & = \frac{\partial}{\partial x}(T(x,t)\alpha(x,t)) + I(t)B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{cases}$$

L'intégration de la première équation donne $T(x,t) = f(t) + g(\alpha,t)$ où g est une fonction dépendant de α et qui est négligeable devant f. En gardant le terme le plus grand, on écrira donc $T(x,t) = f(t) = T_0$. La deuxième équation donne finalement :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) = \frac{T_0}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + \frac{I_0}{\mu}B_0\cos(\omega t)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

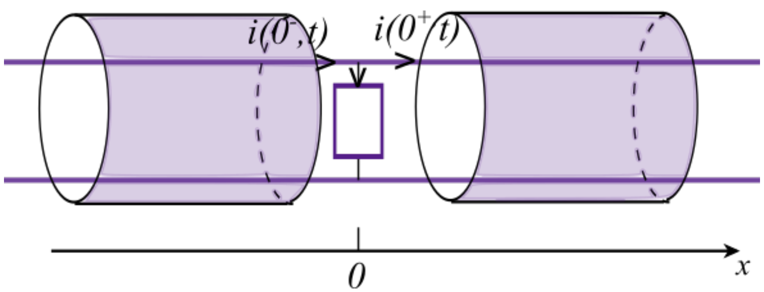
2. On injecte la solution proposée dans l'équation différentielle. On trouve :

$$C = \frac{\frac{I_0}{\mu}B_0}{\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 - \omega^2}$$

Lorsque ω tend vers la fréquence d'un mode propre de la corde, l'amplitude de la vibration diverge. On a résonance.

2. Câble court-circuité

1. Effectuons un schéma de la situation pour mieux comprendre :



Notons $i(0^-,t)$ le courant traversant le câble en $x = 0^-$, $i_Z(t)$ le courant traversant l'impédance Z_1 et $i(0^+,t)$ le courant traversant le câble en $x = 0^+$. On a :

$$i(0^-,t) = i_Z(t) + i(0^+,t)$$

Par ailleurs, la tension étant continue (puisque Z_1 est branché en parallèle), on a :

$$u(0^-,t) = u_Z(t) = u(0^+,t)$$

Or $i_Z(t) = \frac{u_Z(t)}{Z_1}$ et $i(0^+,t) = \frac{u(0^+,t)}{Z_c}$ car du côté $x > 0$, l'onde est progressive harmonique. En remplaçant, on obtient donc :

$$i(0^-,t) = \frac{2u(0^-,t)}{Z_c} \Rightarrow u(0^-,t) = \frac{Z_c}{2} i(0^-,t)$$

En $x = 0^-$, le circuit est donc bien équivalent à une impédance valant $\boxed{\frac{Z_c}{2}}$.
Attention, du côté $x < 0$, on a une onde incidente et une onde réfléchie. On ne peut donc pas écrire $i(0^-,t) = \frac{u(0^-,t)}{Z_c}$ car cette relation n'est valable que pour une onde progressive.

2. On commencera par définir une onde incidente, une onde réfléchie et une onde transmise en intensité :

$$i(x,t) = \begin{cases} i_i(x,t) + i_r(x,t) & \forall x < 0 \\ i_t(x,t) & \forall x > 0 \end{cases}$$

et en tension :

$$ui(x,t) = \begin{cases} u_i(x,t) + u_r(x,t) & \forall x < 0 \\ u_t(x,t) & \forall x > 0 \end{cases}$$

Bien entendu, ces ondes ne sont pas toutes indépendantes. Elles sont reliées par les conditions aux limites et par l'impédance caractéristique du câble.
On définira le coefficient de réflexion en intensité :

$$\boxed{r = \frac{i_r(0^-,t)}{i_i(0^-,t)}}$$

On utilise alors la condition aux limites de la question précédente :

$$i(0^-,t) = i_i(0^-,t) + i_r(0^-,t) = \frac{2u(0^-,t)}{Z_c} = 2\frac{u_i(0^-,t) + u_r(0^-,t)}{Z_c} = 2(i_i(0^-,t) - i_r(0^-,t))$$

où on a utilisé les relations $u = \pm Z_c i$ pour les ondes progressives. En divisant tout par i_i, on obtient :

$$1 + r = 2(1 - r) \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{3}}$$

3. Le fait de placer un court-circuit en $x = \ell$ impose un noeud de tension. On va donc chercher une onde stationnaire pour la tension sous la forme :

$$u(x,t) = u_m \cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$$

Le noeud de tension impose $k\ell + \psi = \frac{\pi}{2} + n\pi$. D'où :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_m \cos(\omega t + \varphi)\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi + k(x - \ell)\right) \\ &= (-1)^m u_m \cos(\omega t + \varphi)\sin(k(x - \ell)) \\ &= A\cos(\omega t + \varphi)\sin(k(x - \ell)) \end{aligned}$$

Pour déterminer l'expression de $i(x,t)$, on repasse par la loi des mailles (ou la loi des noeuds) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda\frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{kA}{\Lambda}\cos(\omega t+\varphi)\cos(k(x-\ell))$$
$$\Rightarrow i(x,t) = -\frac{kA}{\omega\Lambda}\sin(\omega t+\varphi)\cos(k(x-\ell))+f(x)$$
$$\Rightarrow \boxed{i(x,t) = -\frac{A}{Z_c}\sin(\omega t+\varphi)\cos(k(x-\ell))}$$

Remarque 1 : la fonction $f(x)$, qui correspond à une variation du courant dans le câble en fonction de x uniquement ne correspond à rien de physique. Cette fonction est donc nulle.
Remarque 2 : en $x=\ell$, l'intensité est une fonction sinusoïdale d'amplitude maximale. On a donc bien un ventre d'intensité.

4. Si on souhaite avoir un noeud de courant en $x=0^+$ avec un ventre en $x=\ell$, il faut que $n\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}=\ell$. La plus petite valeur de ℓ est $\boxed{\ell=\ell_0=\frac{\lambda}{4}}$.
5. Si on a un noeud de courant en $x=0^+$, on a $i(0^+,t)=0$. En reprenant le raisonnement de la question 1, on a alors $i(0^-,t)=\frac{u(0^-,t)}{Z_c}$. Tout se passe donc comme si la partie $x<0$ du câble était uniquement branchée sur l'impédance $Z_1=Z_c$. On a alors adaptation d'impédance et la partie $x<0$ n'est parcourue que par une onde progresive dans le sens des x croissants.