TD n°25 Ondes sonores

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Modèle de clarinette

Une clarinette est modélisée par un tuyau de section S et de longueur ℓ. Il contient un fluide pour lequel la célérité des ondes est notée c. Une extrémité du tuyau est bouchée alors que l'autre est ouverte sur l'atmosphère.

Au repos, la pression vaut P_0 est la masse volumique μ_0 dans le fluide de la flûte. Les effets de la pesanteur sont négligés. On se place dans l'approximation acoustique.
Le musicien injecte à une extrémité du tuyau une onde sonore plane, il s'établit alors une onde stationnaire modélisée par $P(x,t) = P_0 + p_m \cos(\omega t)\cos(kx)$.

1. Etablir l'expression du champ des vitesses dans la clarinette.
2. Comment s'écrivent les conditions aux limites ?
3. Etablir quelles fréquences peuvent être jouées avec cet instrument.
4. Comparer avec les fréquences émises par un tuyau d'orgue qui est ouvert aux deux extrémités.

2. Réflexion et transmission d'un son lors d'un changement de milieu

2.1 Isolation phonique⋆

Un mur est modélisé par une membrane de masse volumique ρ et d'épaisseur e en translation au voisinage de $x = 0$ dans un tuyau sonore de section S rempli d'air à la température de 20°C de masse volumique $\rho_0 = 1,2$ kg.m^{-3}. On cherche à déterminer les ondes transmise et réfléchie en $x = 0$ pour une onde de vitesse incidente $v_i = v_0 e^{j(\omega t - kx)}$ pour $x < 0$.

1. On considère que la membrane se trouve constamment en x = 0. À quelle condition cette approximation est-elle valable ?
2. Écrire les conditions aux limites en $x = 0$. On fera bien attention à la condition sur la pression.
3. Donner la forme des ondes de pression et de vitesse du côté (1) : $x < 0$ et du côté (2) : $x > 0$.
4. En déduire le coefficient complexe de transmission en vitesse $\tau(j\omega)$, puis celui en puissance $T(j\omega)$. Commenter le type de filtre obtenu au vu de la fonction de transfert $\tau(j\omega)$. Donner l'expression de sa fréquence de coupure.
5. Pour $\rho_0 = 1800$ kg.m^{-3}, quelle est l'épaisseur du mur permettant une atténuation de 40 dB à 400 Hz ? Quels instruments d'un groupe de rock entend-on le mieux à travers un mur ?

2.2 Réflexion et transmission dues à un changement de section•

On considère la propagation d'ondes sonores planes dans un tube cylindrique d'axe Ox rempli d'un gaz. On se place dans l'approximation acoustique. On pose pour les champs de pression, masse volumique, température et vitesse : $p(x,t) = p_0 + p_1(x,t)$, $\vec{v}(x,t) = v_1(x,t)\vec{u}_x$ où les grandeurs indicées par 1 sont des infiniment petits du même ordre (perturbations acoustiques) et les grandeurs indicées par 0 sont les grandeurs dans le fluide au repos, supposées uniformes. On note c la célérité des ondes sonores dans le fluide ; ρ_0 la masse volumique du fluide au repos. En $x = 0$, la section du cylindre passe de S_1 à S_2. On s'intéresse au cas où une onde plane progressive harmonique se propage pour $x < 0$ dans le sens des x croissants, la vitesse s'écrit alors pour $x < 0$: $\vec{v}(x,t) = v_0 e^{j(\omega t - kx)}\vec{u}_x$.

1. À quelle condition un changement de section continu peut-il être modélisé comme dans cet exercice par un changement brutal en $x = 0$? Quelles sont alors les conditions aux limites que vérifient les champs en $x = 0$?

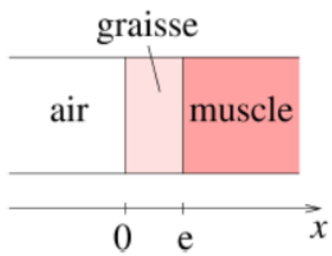
2. En déduire les coefficients de réflexion r et de transmission t en vitesse des ondes en fonction de $\alpha = S_2/S_1$, puis ceux R et T en puissance. Faire un bilan énergétique et commenter. Tracer $R(\alpha)$ et $T(\alpha)$. Commenter le cas $S_2 >> S_1$.

2.3 Couche anti-reflet•

Cet exercice est assez calculatoire.

1. Les impédances caractéristiques de l'air et des tissus musculaires pour les ultrasons valent $Z_a = 400$ kg.m^{-2}.s^{-1} et $Z_m = 1,7.10^6$ kg.m^{-2}.s^{-1}. Calculer le coefficient de transmission des puissances sonores à l'interface air-muscle et commenter.

2. Pour supprimer l'onde réfléchie, on réalise une couche anti-reflet d'épaisseur e en graisse, d'impédance Z_g (figure ci-dessous).



On note c_a, c_g et c_m les célérités du son dans chacun des trois milieux et on pose $k_a = \omega/c_a$, $k_g = \omega/c_g$ et $k_m = \omega/c_m$. On cherche alors en notation complexe des champs de vitesse dans les trois milieux de la forme :

$$\begin{cases} v(x<0,t) = A_a \mathrm{e}^{j(\omega t - k_a x)} \\ v(0<x<e,t) = A_g \mathrm{e}^{j(\omega t - k_g x)} + B_g \mathrm{e}^{j(\omega t + k_g x)} \\ v(x>e,t) = A_m \mathrm{e}^{j(\omega t - k_m x)} \end{cases}$$

(a) Justifier la forme de ces expressions.

(b) Quelle est la forme du champ de surpression dans les trois milieux ?

(c) Écrire les conditions aux limites et en déduire les valeurs qu'il faut choisir pour e et Z_g.

(d) Commenter la puissance acoustique reçue dans le muscle, dans cette configuration.

3. Ondes sphériques

Une enceinte, assimilée à une sphère pulsante de centre O fixe dont le rayon $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$ varie sinusoïdalement avec une amplitude $a_1 << a_0 < \lambda$ émet des ondes sonores dans tout l'espace extérieur à la sphère, rempli d'air de masse volumique μ_0 où la célérité des ondes sonores vaut c.
Compte tenu de la symétrie du problème, on cherche en coordonnées sphériques de centre O des champs de la forme $p_1(M,t) = p_1(r,t)$ et $\vec{v}_1(M,t) = v_1(r,t)\vec{u}_r$.
On rappelle que pour un champ scalaire ne dépendant que de r en coordonnées sphériques le laplacien peut s'écrire :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf(r,t))$$

1. Déterminer la forme générale des solutions $p_1(r,t)$ et interpréter. Justifier que l'on doit choisir $p_1(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$. Quelle est la forme des surfaces isobares ?
2. Dans la suite, on pose $k = \omega/c$ et on cherche une solution de la forme $p_1(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi)$. Déterminer le champ des vitesses correspondant.
3. Simplifier l'expression du champ des vitesses pour $r << \lambda$. En utilisant la condition aux limites, en déduire l'expression de A et de φ
4. Simplifier l'expression du champ des vitesses pour $r >> \lambda$ et commenter la structure de l'onde.
5. Déterminer l'expression de l'intensité acoustique rayonnée à une distance $r >> \lambda$. Exprimer la puissance totale rayonnée à travers une sphère de rayon r. Expliquer pourquoi des enceintes acoustiques sphériques sont-elles d'autant plus grande que le son émis est grave ?