Correction TD n°25

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

Réflexion et transmission dues à un changement de section•

1. La distance caractéristique de changement de section soit très inférieure à la longueur d'onde de l'onde progressive qui se propage. On a continuité du débit en 0 et continuité de la pression :

$$\begin{cases} S_1(v_i(0,t)+v_r(0,t)) & = S_2 v_t(0,t) \\ p_i(0,t)+p_r(0,t) & = p_t(0,t) \end{cases}$$

2. En introduisant l'impédances Z_1 (ici, on a le même milieu de part et d'autre), la dernière relation se réécrit :

$$(v_i(0,t)-v_r(0,t)) = v_t(0,t)$$

En divisant les deux relations sur la vitesse par $v_i(0,t)$, on obtient :

$$\begin{cases} S_1(1+r) & = S_2 t \\ (1-r) & = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r & = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \\ t & = \frac{2\alpha}{\alpha+1} \end{cases}$$

En puissance, cela donne

$$R = \frac{<\Pi_r> S_1}{<\Pi_i> S_1} = \frac{<v_r^2>}{<v_i^2>} = r^2 = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2$$

et (attention à ne pas oublier la section S qui varie ici !) :

$$T = \frac{<\Pi_t> S_2}{<\Pi_i> S_1} = \frac{<v_t^2> S_2}{<v_i^2> S_1} = \alpha\tau^2 = \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2}$$

On obtient bien $R+T=1$, traduisant la conservation de l'énergie. Dans le cas où $S_2 >> S_1$, on a donc $\alpha >> 1$, aboutissant à $R \approx 1$ et $T \to 0$.

Couche anti-reflet•

1. En utilisant le résultat du cours, on a :

$$T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} = 9,1.10^{-4}$$

en remplaçant Z_1 par Z_a et Z_2 par Z_m.

2. (a) On reconnaît : une onde incidente dans le sens des x croissants dans l'air, une onde incidente et une onde réfléchie dans la graisse, une onde transmise dans le muscle.

   (b) On utilise pour cela les impédances liant pression et vitesse :

$$\begin{cases} p(x<0,t) = Z_a A_a e^{j(\omega t - k_a x)} \\ p(0<x<e,t) = Z_g A_g e^{j(\omega t - k_g x)} - B_g e^{j(\omega t + k_g x)} \\ p(x>e,t) = Z_m A_m e^{j(\omega t - k_m x)} \end{cases}$$

   (c) En écrivant la continuité du champ des vitesses et de la surpression en $x=0$, il vient :

$$\begin{cases} A_a = A_g + B_g \\ Z_a A_a = Z_g(A_g - B_g) \end{cases}$$

En écrivant la continuité du champ des vitesses et de la surpression en $x=e$, il vient :

$$\begin{cases} A_g e^{-jk_g e} + B_g e^{jk_g e} = A_m e^{-jk_m e} \\ Zg(A_g e^{-jk_g e} - B_g e^{jk_g e} = Z_m A_m e^{-jk_m e} \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, il faut isoler les exponentiels. on iobtient, après calcul :

$$e^{2jk_g e} = \frac{(Z_g-Z_m)(Z_a+Z_g)}{(Z_m+Z_g)(Z_g-Z_a)}$$

L'égalité des parties réelles est des parties imaginaires imposent

$$\sin(2k_g e) = 0 \Rightarrow 2k_g e = n\pi \Rightarrow e = \frac{(2n+1)\lambda_g}{4}$$

avec $\lambda_g = \frac{2\pi}{k_g}$. La nullité du sinus implique $\cos(2k_g e) = \pm 1$. Seule la solution -1 permet d'aboutir à une égalité pertinente (sinon on trouve $Z_m = Z_a$, ce qui est impossible). On trouve alors $Z_g^2 = Z_m Z_a$.

(d) Notons que l'onde stationnaire qui se crée dans la graisse ne transporte pas d'énergie. On peut en effet montrer à partir des équations précédentes que :

$$A_m = A_g + B_g \mathrm{e}^{2jk_g e} = A_g - B_g = \frac{Z_a}{Z_g} A_a = \sqrt{\frac{Z_a}{Z_m}} A_a$$

Puis : $< \Pi_i^2 >= Z_a < v(x=0,t)^2 = \frac{Z_a A_a^2}{2}$ et $< \Pi_t >= \frac{Z_m A_m^2}{2} = \frac{Z_a A_a^2}{2} =< \Pi_i >$. Ainsi le coefficient de transmission en puissance entre l'air et le muscle vaut 1 !