Correction DS n°6 (moyen)

PSI 2022/2023

Problème 1 : Étude d'un actionneur électromécanique

Multipôle magnétique

❑ **1** — Il y a invariance par translation dans la direction de $\vec{u}_z$. Donc, les champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ ne dépendent pas de z.

❑ **2** — Utilisons le théorème d'Ampère sur la ligne de champ moyenne :

$$\oint \vec{H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = I \Leftrightarrow H_{fer} l_{fer} + 2eH_{air} = I$$

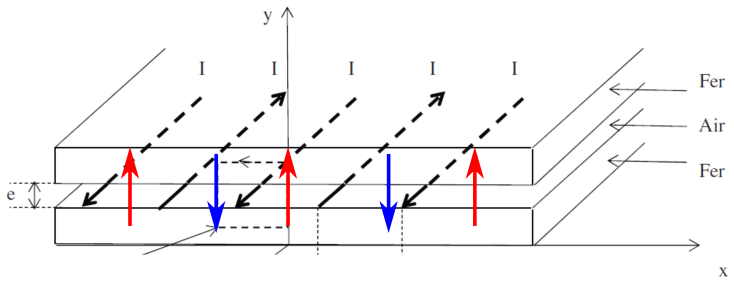
❑ **3** — Cela vient du fait que $\vec{B}$ est à flux conservatif.

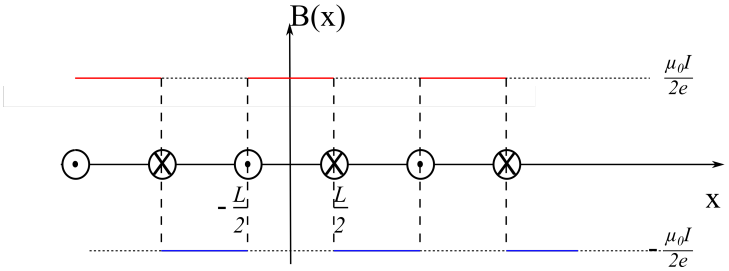
❑ **4** — On a $B_{fer} = \mu_0 \mu_r H_{fer}$ et $B_{air} = \mu_0 H_{air}$. On en déduit :

$$B\frac{l_{fer}}{\mu_0 \mu_r} + B\frac{2e}{\mu_0} = I \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2e}}$$

Si on souhaite avoir un champ B important, il vaut mieux que l'entrefer soit fin. Néanmoins, il faut qu'il y ait suffisamment de place pour laisser par l'actionneur.

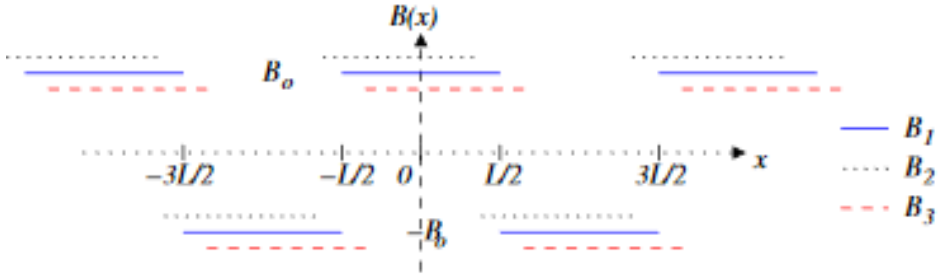
❑ **5** — L'expression obtenue précemment montre que le champ est uniforme dans la zone $x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$. De plus tout plan perpendiculaire à $\vec{e}_x$ contenant un fil est un plan de symétrie des courants, c'est donc un plan d'antisymétrie du champ. On a donc :



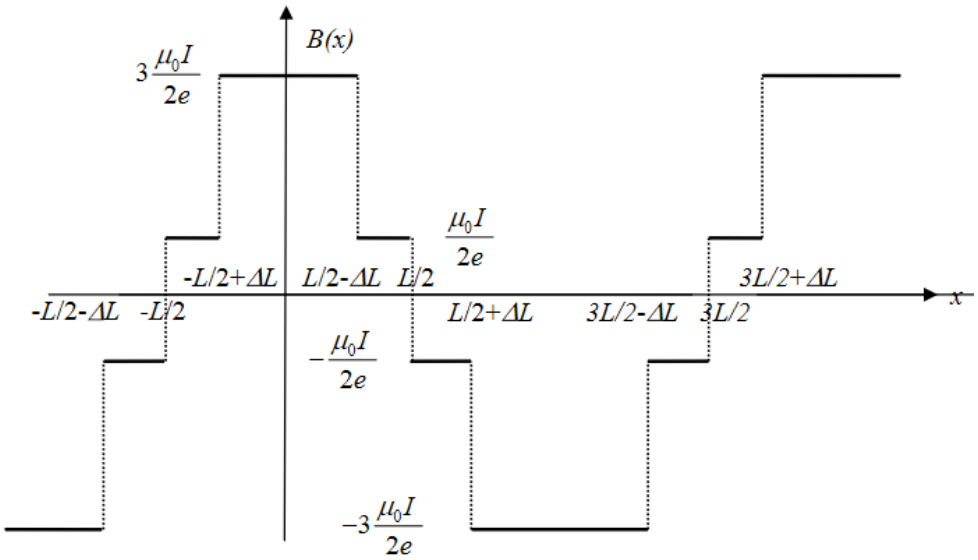


Multi-pôle magnétique sinusoïdal

❑ **6** — On effectue la même démarche de superposition de courbes comme dans le cours. La distribution proposée correspond à trois fois la distribution précédente avec des décalages de $\pm\Delta L$ pour deux d'entre elles (les champs ont même amplitude mais les courbes ont été légèrement décalées verticalement par souci de lisibilité).



Le champ résultant est la somme des trois champs magnétiques :



Onde magnétique plane progressive sinusoïdale

❑ **7** — La somme des deux champs créés par les deux phases donne :

$$B(x,t) = KI_s\left(\cos(\omega_s t)\cos\frac{\pi x}{L} + \sin(\omega_s t)\cos\left(\frac{\pi x}{L} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = KI_s\left(\cos(\omega_s t)\cos\frac{\pi x}{L} + \sin(\omega_s t)\sin\frac{\pi x}{L}\right)$$

En utilisant la formule de trigo classique, on en déduit $\boxed{B(x,t) = KI_s\cos\left(\omega_s t - \frac{\pi x}{L}\right)}$. On a donc une onde progressive harmonique se déplaçant dans le sens des x croissants, analogue du champ tournant statorique de la machine synchrone. Ce champ se déplace à une vitesse $v_s = \frac{\omega_s}{k} = \frac{\omega_s}{\frac{\pi}{L}} = \frac{\omega_s L}{\pi}$. On peut aussi utiliser la relation plus classique $\lambda = v_s T$ en remarquant que la longueur d'onde du champ magnétique vaut ici $2L$.

❑ **8** — En inversant le sens du courant dans le second enroulement, on a,toutes choses égales par ailleurs, $i_2(t) = -I_s\sin(\omega_s t)$, ce qui conduit à $B(x,t) = KI_s\cos\left(\omega_s t + \frac{\pi x}{L}\right)$. On a bien une onde se propageant dans le sens des x décroissants.
On a $\lambda = 2L = \frac{v_s}{f} \Rightarrow \boxed{L = 0,7\text{m}}$.

Actionneur linéaire synchrone

❑ **9** — En utilisant l'expression fournie, la force qui s'exerce sur la spire, à la date t, est de la forme $\vec{F}(t) = F_x(t)\vec{e}_x$. On admettra que :

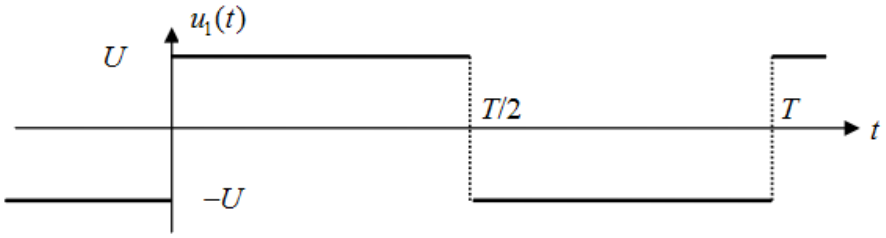
$$F_x(t) = 2LbIB_0k\sin(\omega_s t - kx(t)) = 2LbIB_0k\sin(\omega_s t - k(x_0 + vt)) = 2LbIB_0k\sin((\omega_s - kv)t - kx_0)$$

❑ **10** — D'après l'expression précédente, $F_x(t)$ est une force sinusoïdale de valeur moyenne nulle à moins que $\omega_s = kv$, c'est à dire $\boxed{v = v_s}$. C'est la condition de synchronisme : l'actionneur doit avoir la même vitesse que le champ magnétique en régime permanent. Dans ce cas, $\vec{F}$ a pour expression : $\vec{F} = -2LbIlB_0k\sin(kx_0)\vec{u}_x$.

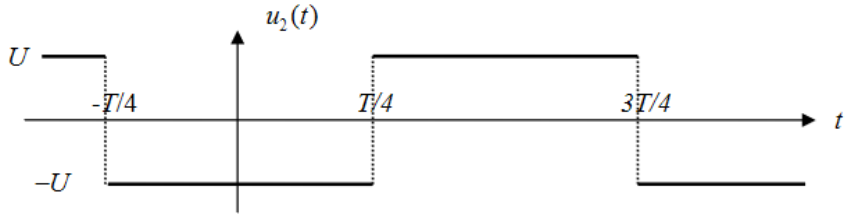
La force est maximale pour $\boxed{kx_0 = -\frac{\pi}{2} + 2p\pi \quad p \in \mathbb{Z}}$.

Pilotage de l'actionneur synchrone

❑ **11** — Dans la première demi-période, la source de tension est directement connectée à la charge, et $u_1(t) = +U$ Dans la deuxième demi-période, la source est connectée à la charge en inversant ses bornes,$u_1(t) = -U$. La tension $u_1(t)$ est une tension créneau :



❑ **12** — La tension créneau $u_1(t)$ va donner par filtrage à travers la charge le courant sinusoïdal qui doit être en $i_1(t) = i_m\cos(\omega_s t)$. D'après le paragraphe précédent, pour une onde se propageant dans le sens des x croissants, le courant $i_2(t)$ doit être de la forme $i_2(t) = i_m\sin(\omega_s t) = i_m\cos(\omega_s t - \frac{\pi}{2})$. L'ouverture et la fermeture des interrupteurs de la phase 2 doivent être retardés d'un quart de période par rapport à la phase 1 :



❑ **13** — L'expression de $F(t)$ devient :

$$F(t) = 2LbIKk[I_1\sin(\omega_s t - kx(t) + \varphi_1) + I_3\sin(3\omega_s t + kx(t) + \varphi_3) + I_5\sin(5\omega_s t - kx(t) + \varphi_5)]$$

Lorsqu'on a synchronisme, on a $\omega_s t - kx = -kx_0$. D'où :

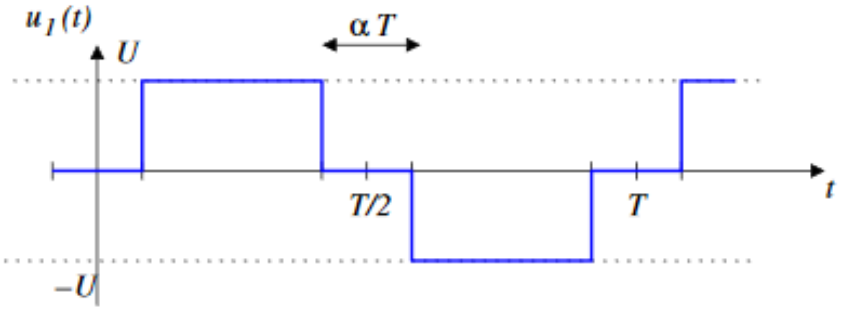
$$F(t) = 2LbIKk[I_1\sin(-kx_0 + \varphi_1) + I_3\sin(4\omega_s t + kx_0 + \varphi_3) + I_5\sin(4\omega_s t - kx_0 + \varphi_5)]$$

La fréquence de la première vibration de $F(t)$ vaut $\boxed{4f_s = \frac{2\omega_s}{\pi}}$.

❑ **14** — On décompose les différents régimes :

—K_{1d} et K_{1a} sont simultanément fermés sur $[\alpha\frac{T}{2}, \frac{T}{2} - \alpha\frac{T}{2}]$, sur cet intervalle : $u_1(t) = +U$;
—K_{1b} et K_{1c} sont simultanément fermés sur$[\frac{T}{2} + \alpha\frac{T}{2}, T - \alpha\frac{T}{2}]$, sur cet intervalle : $u_1(t) = -U$;
—Le reste du temps, la charge est court-circuitée : $u_1(t) = 0$.

Ce qui donne pour le chronogramme :

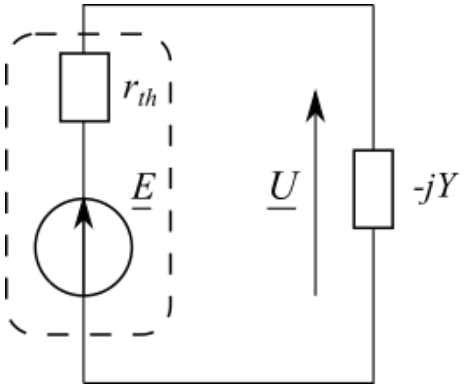


Les vibrations de l'actionneur sont dues à la présence des harmoniques de rang 3 et 5 au sein de l'onde de courant. L'idée est de tenter de supprimer ces harmoniques au sein de la tension $u_1(t)$ afin que ces harmoniques ne soient pas générées.
La décomposition de Fourier fournie en annexe assure que le coefficient de l'harmonique de rang k est proportionnel à $\dfrac{\cos[(2k+1)\alpha\pi]}{2k+1}$. Ainsi les conditions pour annuler les harmoniques de rang 3 et 5 sont (sachant que $0 < \alpha < 1/2$) :
—$\cos[3\alpha\pi] = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$,
—$\cos[5\alpha\pi] = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{10}$,
Comme on ne peut choisir qu'une seule valeur de α et que l'harmonique de rang 3 est de plus grande amplitude que l'harmonique de rang 5, il vaut mieux annuler l'harmonique de rang 3 et prendre $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{6}}$.

Partie 2 : Consommation électrique d'un moteur asynchrone monophasé

❑ **15** — A l'aide de la figure 7, on trouve un facteur de surintensité au démarrage de $\frac{17}{02} = 8.5$.

❑ **16** — Effectuons un schéma électrique du système :



Un pont diviseur de tension nous donne :

$$\underline{U} = -\frac{jY}{r_{\text{th}} - jY}E$$

•En régime permanent, d'après l'énoncé, on peut négliger r_{th} par rapport à jY et donc négliger la chute de tension aux bornes de l'alternostat due à la résistance interne. On peut donc écrire $E \approx U \approx 185\text{V}$.

•Pour déterminer r_{th}, on peut regarder courant et intensité au démarrage de la machine. Lorsque $I = 17\text{A}$, on a $U \approx 167\text{V}$. En prenant le module du pont diviseur de tension et en isolant r_{th}, on en déduit :

$$r_{\text{th}} = Y\sqrt{\frac{E^2}{U^2} - 1} = 4,6\Omega$$

❑ **17** — Si le courant total est limité, alors le pic de courant au réfrigérateur implique une diminution du courant pour les autres appareils. Ceux-ci risquent de fonctionner moins efficacement. Si la tension est imposée (ce qui est plus probable), le pic de courant risque de faire faire disjoncter la prise de courant général et donc disjoncter tous les appareils.

❑ **18** — Le pince ampèremétrique est basée sur le phénomène d'induction électromagnétique. Lorsque le courant à travers le fil varie, le champ magnétique créé est variable et génère donc une variation de flux à travers la bobine torique. D'après la loi de Faraday :

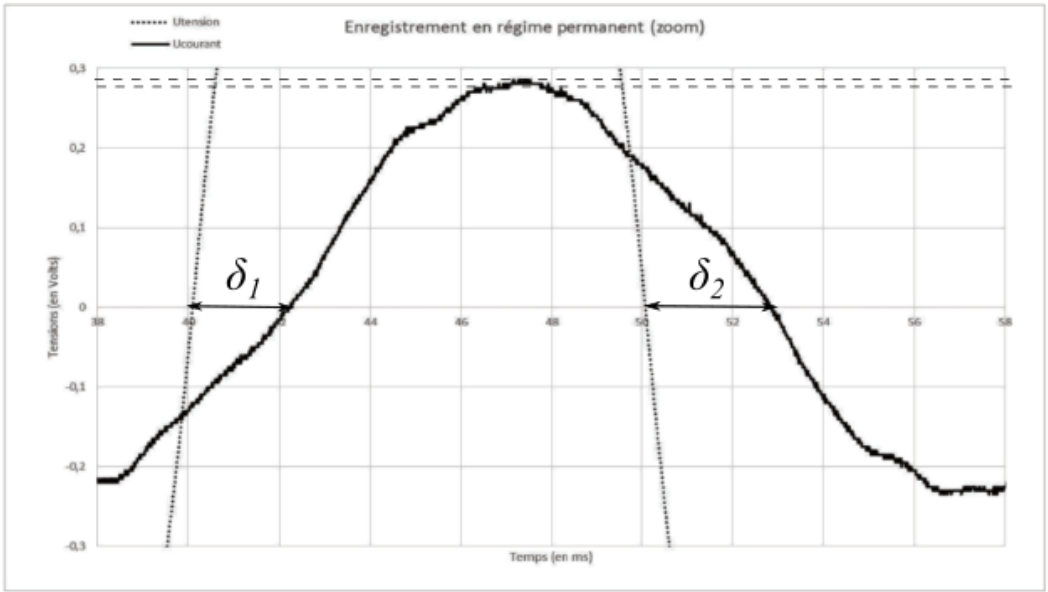
$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B(t)}{\mathrm{d}t}$$

il apparaît une tension aux bornes de la bobine. Cette tension est proportionnelle au courant traversant le fil et dépend du diamètre de la pince, de l'épaisseur du tore et du nombre de spires de la bobine torique.

❑ **19** — On se place dans l'ARQS. Le courant travsersant la pince ne dépend pas de la position de la pince. On a invariance par translation.

❑ **20** — On a $< P >= \frac{UI}{2}\cos(\Delta\varphi)$.

❑ **21** — A l'aide de la figure 14, on peut estimer le temps de retard δt entre les courbes de $i(t)$ et $u(t)$. Attention, on lit toujours ce temps de retard en se plaçant aux temps où les grandeurs s'annulent (et non au temps où elles sont maximales) car c'est beaucoup plus précis. On trouve deux valeurs selon qu'on se place avant le maximum ou après celui-ci : $\delta t_1 = 2,1$ ms et $\delta t_2 = 2,7$ ms (cf figure ci-dessous). Prenons la moyenne du résultat : $\delta t = 2,4$ms.



La période des signaux valant 20 ms, on en déduit un déphasage de $|\varphi| = 2\pi\frac{\Delta t}{T} = 0,75$ rad. Le facteur de puissance vaut $\boxed{\cos(\Delta\varphi) = 0,73}$. Par ailleurs, on lit sur la figure 13 que l'amplitude de la tension vaut $\boxed{U = 175\text{V}}$. A l'aide de la figure 14, on lit $\boxed{I = 2,51\text{A}}$. On en déduit $\boxed{P = 160\text{W}}$.

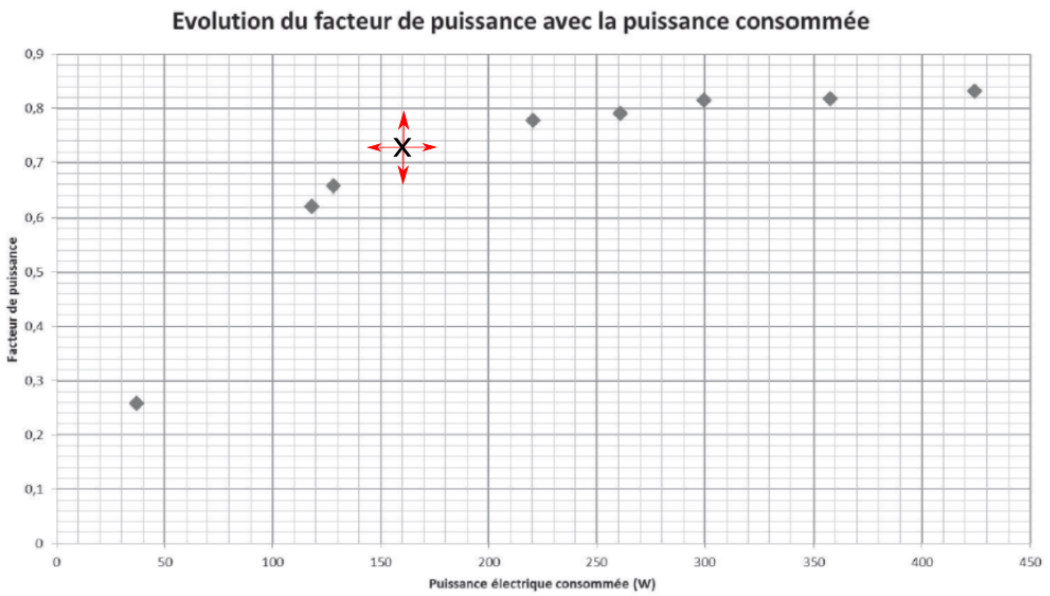
❑ **22** — Sur la figure 14, on voit que l'incertitude sur le déphasage φ est essentiellement due à l'incertitude sur le temps pour lequel l'intensité s'annule. On estime l'incertitude sur δ à $\pm 0,3$ ms, ce qui correspond à $\Delta\varphi = 0,094$ rad. On en déduit une incertitude sur le facteur de puissance $\Delta\cos\Delta\varphi = 0,07$. Les incertitudes sur les autres grandeurs valent $\Delta U \approx 1,5$V et $\Delta I \approx 0,01$A. Les incertitudes relatives sont égales à :

$$\frac{\Delta(\cos(\Delta\varphi))}{\cos(\Delta\varphi)} = 9,6\% \quad \frac{\Delta I}{I} = 0,4\% \quad \frac{\Delta U}{U} = 0,6\%$$

La source d'incertitude principale est celle relative au déphasage. La valeur de l'incertitude relative sur la puissance vaut :

$$P = \frac{UI}{2}\cos\Delta\varphi \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(\cos\Delta\varphi)}{\cos\Delta\varphi}\right)^2} \approx \frac{\Delta U}{U} = 9,6\%$$

Ce qui veut dire $\boxed{145\text{W} \leq P \leq 176\text{W}}$.
Le nouveau point est rajouté ci-dessous :



❑ **23** — On cherche à avoir le facteur de puissance le plus élevé possible afin d'avoir un courant de ligne le plus petit possible. Ainsi, les pertes par effet Joule seront les plus faibles possibles.

Partie 3 : Câble coaxial

❑ **24** — Loi des nœuds : $i(z,t) = i(z+\mathrm{d}z) + C\,\mathrm{d}z\frac{\partial V(z+\mathrm{d}z,t)}{\partial t}$, c'est à dire à l'ordre 1 en $\mathrm{d}z$:

$$0 = \frac{\partial i}{\partial z} + C\frac{\partial V}{\partial t} \quad (1)$$

Loi des mailles : $V(z,t) = L\,\mathrm{d}z\frac{\partial i}{\partial t} + V(z+\mathrm{d}z,t)$, c'est à dire à l'ordre 1 en $\mathrm{d}z$:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial z} + L\frac{\partial i}{\partial t} \quad (2)$$

❑ **25** — En dérivant par rapport à z l'expression (1), il vient : $0 = \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} + C\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, on utilise alors l'équation (2) pour en déduire :

$$\boxed{0 = \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{LC}$$

Le potentiel vérifie la même équation de d'Alembert, on l'obtient en permutant le rôle des équations (1) et (2) dans la démonstration ci-dessus.

Pour une équation de d'Alembert à une dimension, on sait que la solution la plus générale est la superposition d'une onde progressive dans le sens des z croissants et d'une onde progressive dans le sens des z décroissants : $\boxed{V(z,t) = f(t - z/c) + g(t + z/c)}$ avec f et g des fonctions réelles.

❑ **26** — Le court-circuit impose une tension nulle à l'extrémité du câble :

$$0 = \underline{V_{im}} e^{-jk\ell} + \underline{V_{rm}} e^{jk\ell}$$

La présence du GBF à l'origine impose :

$$V_0 = \underline{V_{im}} + \underline{V_{rm}}$$

La première condition impose : $\underline{V_{im}} = -\underline{V_{rm}} e^{2jk\ell}$, on reporte dans la seconde relation pour en déduire :

$$\underline{V_{rm}} = \frac{V_0}{1 - e^{2jk\ell}} \quad \text{et} \quad \underline{V_{im}} = \frac{-V_0 e^{2jk\ell}}{1 - e^{2jk\ell}}$$

❑ **27** — On obtient :

$$\underline{r} = \frac{\underline{V_r}(\ell,t)}{\underline{V_i}(\ell,t)} = \frac{\underline{V_{rm}}}{\underline{V_{im}}} \times \frac{e^{j(\omega t + k\ell)}}{e^{j(\omega t - k\ell)}} = \frac{1}{-e^{2jk\ell}} \times e^{2jk\ell} \Rightarrow \boxed{\underline{r} = -1}$$

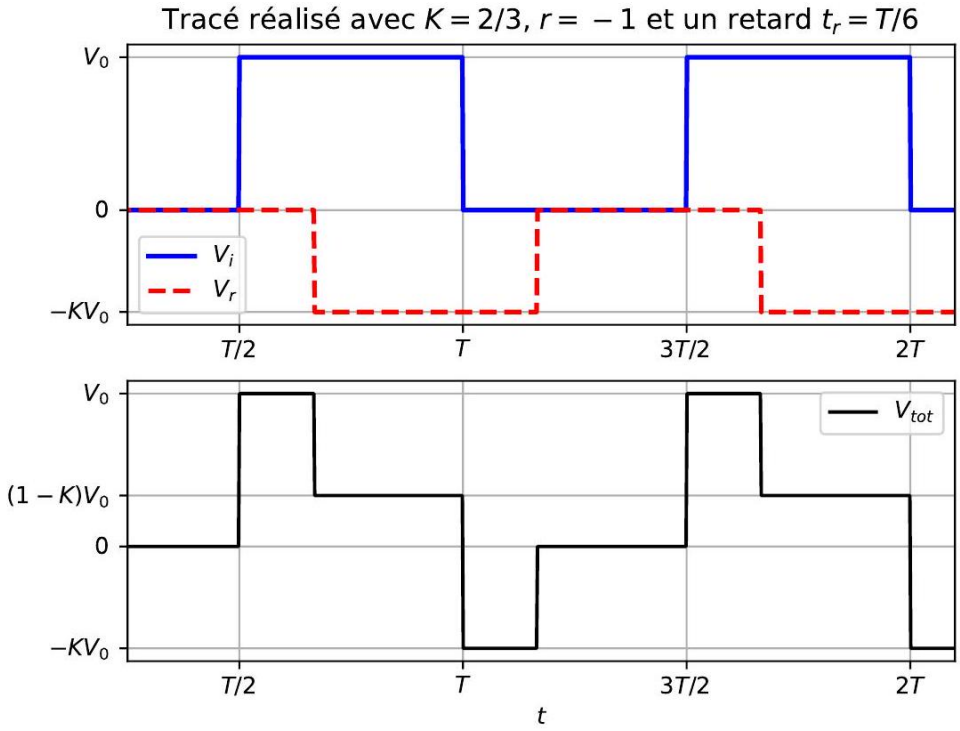
❑ **28** — Pour un circuit ouvert : $\boxed{\underline{i}(\ell,t) = 0}$.

❑ **29** — Si on place en impédance terminale une résistance égale à la l'impédance caractéristique du câble $R = Z_c$, il y a alors adaptation d'impédance et aucune onde n'est réfléchie.

❑ **30** — On a : $\boxed{r_{GBF} \approx 50\Omega}$.

❑ **31** — Voilà une question originale sur le câble coaxial ! Pour un court-circuit en extrémité de câble, le coefficient de réflexion en tension vaut $r = -1$. Le signal retour s'obtient en multipliant le signal incident par $-K$ (où K est le coefficient d'atténuation en tension) et en décalant la courbe de $t_r < \frac{T}{4}$ (retard dû à l'aller-retour).

En obtient le signal de tension en entrée en superposant les signaux incident et réfléchi.



❑ **32** — En comparant le tracé théorique à l'oscillogramme, on en déduit que la largeur du "pic" du signal correspond au retard t_r. Sur l'oscillogramme, cette largeur représente 3/5 de division sachant qu'une division représente 2μs. Pour un aller-retour correspondant à une distance $d = 2\ell = 200$ m, il vient pour la célérité expérimentale :

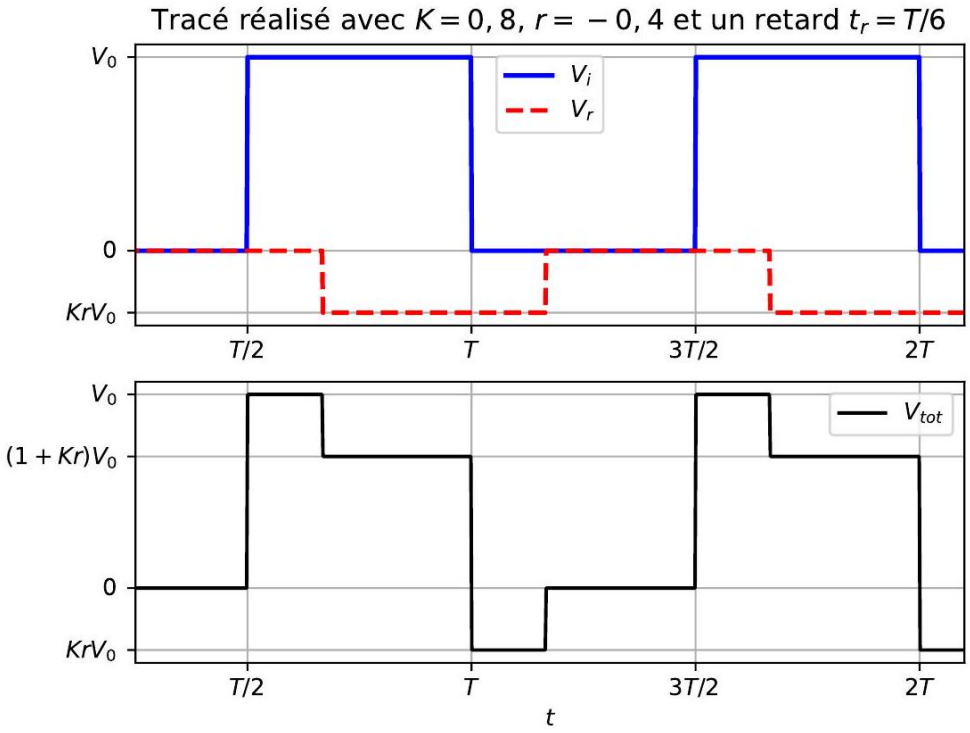
$$c_{exp.} = \frac{2\ell}{t_r} = \frac{200}{3/5 \times 2 \times 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad c_{\text{exp}} \approx 1,7 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Remarque : il manquait la donnée de la longueur du câble qui apparaissait dans une partie précédente du sujet ! Pour la même raison, on ne pouvait comparer la valeur trouvée avec les "résultats précédents" ! Toutes mes excuses !

❑ **33** — En s'aidant de la courbe de la question 31, on mesure par exemple sur l'oscillogramme :
—3,6 divisions pour l'écart entre 0 et V_0 ;
—6,6 divisions pour l'écart entre $-KV_0$ et V_0.
Il vient :

$$\frac{(1+K)V_0}{V_0} = 1 + K = \frac{6,6}{3,6} \Rightarrow K \approx 0,8$$

❑ **34** — On refait un tracé avec $K = 0,8$ et $r = -0,4$:



Pour chacun des oscillogrammes, on compare alors la "distance" (en divisions) entre 0 et V_0 (3,6 pour $R = 20\Omega$) et la "distance" entre 0 et $(1+Kr)V_0$ (2,2 pour $R = 20\Omega$), connaissant K, on en déduit alors r.
Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

$R(\Omega)$	0	20	40	60	80
r	-1	$\approx -0,5$	$\approx -0,1$	$\approx 0,13$	$\approx 0,3$

❑ **35** — L'absence de réflexion est associée à une impédance terminale comprise entre $R = 40\Omega$ et $R = 60\Omega$. *Il n'est pas possible de comparer cet intervalle avec une valeur connue car cela faisait intervenir des résultats de la partie précédente de l'épreuve.*

L'absence de réflexions multiples est due à la valeur de la résistance du GBF qui assure une quasi-adaptation d'impédance $r_{GBF} \approx Z_c$.

Partie 4 : Electrolyse du sulfate de cobalt

1. A l'anode, on peut avoir oxydation de l'eau :

$$H_2O = \frac{1}{2}O_2(g) + 2H^+ + 2e^-$$

Le potentiel de l'électrode est donné par la formule de Nernst : $E_1 = E^0 - 0,06pH = 1,05\text{V}$.
A la cathode, on peut avoir réduction du cobalt :

$$Co^{2+} + 2e^- = Co(s)$$

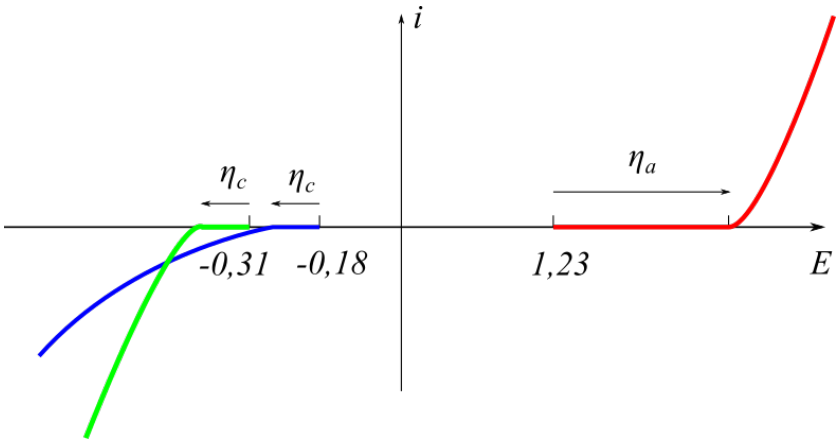
le potentiel vaut $E_2 = E^0 + 0,03\log[Co^{2+}] = E^0 + 0,03\log\left(\frac{m_{Co^{2+}}}{M(Co)V}\right) = -0,31\text{V}$.
On peut aussi avoir la réduction de l'eau :

$$2H^+ + 2e^- = H_2(g)$$

de potentiel $E_3 = E^0 - 0,06pH = -0,18\text{V}$

2. A l'anode, il n'y a qu'une réaction. A la cathode, la réaction la plus favorisée est la réduction de l'oxydant le plus fort. Il s'agit ici de l'eau. La tension minimum à appliquer pour effectuer une électrolyse est égale à la différence des deux potentiels de Nernst : $\boxed{U_{\min} = E_1 - E_3 = 1,23\text{V}}$. Sans prendre en compte les aspects cinétiques, le cobalt ne peut se réduire !

3. On obtient l'allure ci-dessous : en rouge : l'oxydation de l'eau, en vert : la réduction du cobalt, en bleu : la réduction de l'eau.



4. L'équation bilan de l'électrolyse du cobalt s'écrit :

$$\mathrm{H_2O} + \mathrm{Co^{2+}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{O_2(g)} + 2\,\mathrm{H^+} + \mathrm{Co(s)}$$

5. Pour calculer la tension minimale à appliquer, on part de la prédiction thermodynamique, on rajoute les surtensions éventuelles plus la surtension permettant de compenser la chute ohmique : $\boxed{U'_{min} = E_1 - E_2 + \eta_a + |\eta_c| + ri = 3,24\text{V}}$.

6. Pour former un atome de Cobalt, il faut $2e^-$. Or, en un temps Δt, le nombre d'électrons circulant à travers l'électrolyseur vaut $N_e = \frac{i \times \Delta t}{e}$. On en déduit la masse de cobalt formée :

$$m_{\mathrm{Co}} = M(\mathrm{Co}) n_{\mathrm{Co}} = M(\mathrm{Co}) \frac{N_{\mathrm{Co}}}{\mathcal{N}_A} = M(\mathrm{Co}) \frac{N_e}{2\mathcal{N}_A} = \frac{iM(\mathrm{Co})\Delta t}{2F} = 264 \text{ kg}$$

7. Le rendement faradique est égal à la masse de Cobalt réellement formée sur la masse de Cobalt théoriquement attendue. Sa valeur est de $\eta = 0,97$. Ce rendement n'atteint pas 100 % car une partie des électrons sont consommés par la réduction de l'eau en $\mathrm{H_2(g)}$.

8. Pour déterminer cette énergie, on peut simplement calculer le temps qu'on met pour former 1 kg de cobalt $\Delta t = \frac{1}{256}$ jour = 337,5 s. La puissance à fournir à l'electrolyseur valant $P = UI$. On en déduit l'énergie demandée $\boxed{E = UI\Delta t = 11,8.10^3 \text{kJ.kg}^{-1}}$.