TD n°26 Ondes électromagnétiques dans le vide

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Ondes dans le vide

1.1 Caractéristiques d'une OPPH

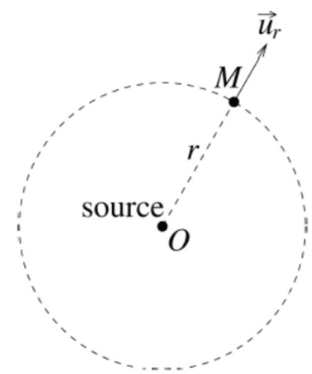
On étudie une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans le vide et dont le champ électrique est $\vec{E} = E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y$ avec $E_x = E_0\cos(\omega t - a(x+y+z))$, avec a = 10^6 SI.

1. Quel est l'unité SI de a ?
2. Déterminer le vecteur d'onde $\vec{k}$ de cette onde.
3. En déduire la longueur d'onde λ. Dans quel domaine du spectre se situe cette onde ? Calculer sa fréquence..
4. Exprimer E_y en fonction de E_x.
5. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$

1.2 Source isotrope

Une source située à l'origine de l'espace crée un champ électromagnétique, de telle sorte qu'en coordonnées sphériques, le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ soit radial et ne dépende spatialement que de r : $\vec{\Pi}(M,t) = \Pi(r,t)\vec{e}_r$. Il n'y a pas de matière en dehors de la source.

1. Exprimer la puissance rayonnée P_r à travers la sphère de centre O et de rayon r en fonction de la norme $\Pi(r)$ du vecteur de Poynting.
2. On se place en régime permanent. Montrer que $\vec{\Pi}$ est à flux conservatif. En déduire la loi de dépendance de Π en fonction de r.



3. L'énergie que la Terre reçoit du Soleil est sous forme de rayonnement électromagnétique. Si la distance terre-soleil variait d'un facteur 2, comment varierait l'énergie reçue par la Terre ?
4. On suppose que les champ électriques et magnétiques sont orthogonaux et de norme telle que $B = E/c$ où c est la vitesse de la lumière. Comment décroissent les normes des champs électrique et magnétique en fonction de r ? Comment appelle-t-on une telle onde ?
5. On considère une ampoule électrique de puissance $P = 20$W (puissance électrique reçue par l'ampoule). Cette puissance est quasiment intégralement rayonnée sous forme d'ondes électromagnétiques. On suppose que le champ rayonné suit les hypothèses décrites précédemment.
   (a) Calculer la norme du vecteur de Poynting à 1 m de l'ampoule.
   (b) En déduire la norme des champs électrique et magnétique.
   (c) Comparer au champ magnétique terrestre et au champ électrique entre les deux bornes d'une prise électrique.

1.3 Cavité résonante

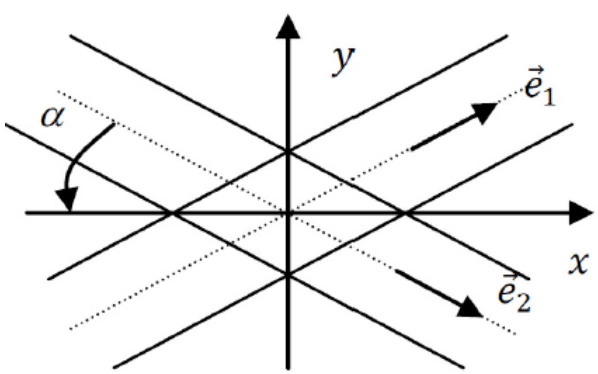
On considère un espace vide compris entre deux plans infiniment conducteurs d'équation $x = 0$ et $x = a$. On y étudie le champ électromagnétique.

1. Etablir l'équation de propagation pour $\vec{E}(M,t)$ dans le vide.
2. On cherche des solutions à variables séparées sous la forme : $\vec{E}(x,t) = f(x)g(t)\vec{u}_y$ Etablir les équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$. Discuter de la forme possible des solutions.
3. On verra dans le chapitre suivant que la composante normale du champ électrique à la surface d'un conducteur est nulle. Exprimer $f(x)$. L'exprimer sous la forme d'une fonction de k où k est une constante qui dépend de a et de n.
4. En déduire l'expression du champ électrique dans la cavité. On notera son amplitude E_0.

1.4 Vélocimétrie•

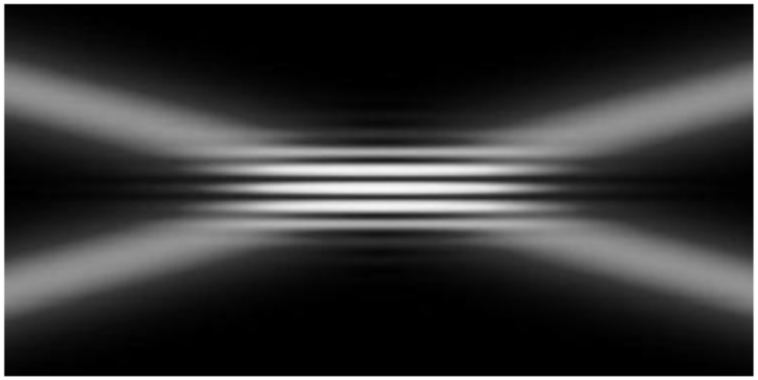
La vélocimétrie laser à franges (VLF) est une technique de mesure de la vitesse d'écoulement de fluide n'utilisant qu'un laser et un aérosol dispersé dans le courant de fluide qu'on cherche à étudier. Cette technique de mesure fournit des mesures locales et instantanées de la vitesse du fluide.

Un laser produit un faisceau monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 514,5$ nm séparé en deux faisceaux cohérents par un ensemble de séparatrices et miroirs. Un montage réfracte ces faisceaux (sous un angle $\alpha = 1,7°$ qui se superposent dans une zone où l'on voit apparaître des franges d'interférences rectilignes. Le fluide d'étude circule parallèle à l'axe (Oy).



On modélise chaque faisceau (i =1 ou 2) par une onde plane polarisée rectilignement selon (O_z) de champ électrique en notation complexe $\underline{\vec{E}}_i(M,t) = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}\vec{e}_z$ de même amplitude. Les vecteurs d'onde$\vec{k}_i$ sont orienté par les vecteurs de base unitaire $\vec{e}_i$.

1. Exprimer dans le repère $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ les vecteurs d'onde en fonction de λ_0 et de l'angle α.
2. Exprimer le champ électrique total $\underline{\vec{E}}(M,t)$ dans la zone de recouvrement.
3. L'intensité lumineuse dans cette zone s'écrit
$$I(M) = \frac{1}{2}|\underline{\vec{E}}(M,t)|^2$$
Exprimer $I(M)$ en fonction de E_0, α, y et λ_0 et expliquer l'allure de la figure d'interférences suivantes que l'on obtiendrait si on plaçait un écran dans le plan xOy :



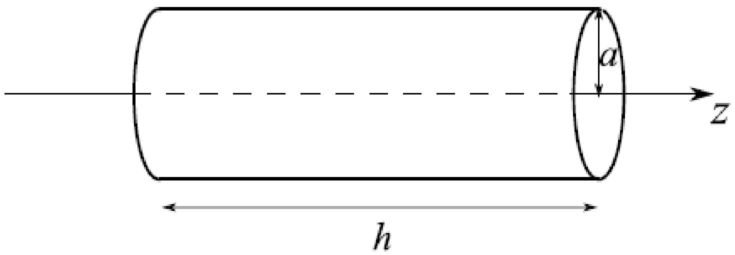
Montrer que la période spatiale i de la figure d'interférences (que l'on nomme l'*interfrange* de cette figure) s'exprime sous la forme
$$i = \frac{\lambda_0}{2\sin\alpha}$$
Calculer numériquement cette interfrange.
4. Les particules passant dans le champ d'interférences émettent un scintillement de fréquence $f = 1,153$ MHz. En déduire la vitesse de l'écoulement.

2. Bilan d'énergie électromagnétique

Les exercices suivants ne portent pas sur les ondes mais font intervenir la notion de vecteur de Poyting et de bilan d'énergie dans d'autres exemples.

2.1 Conducteur ohmique⋆

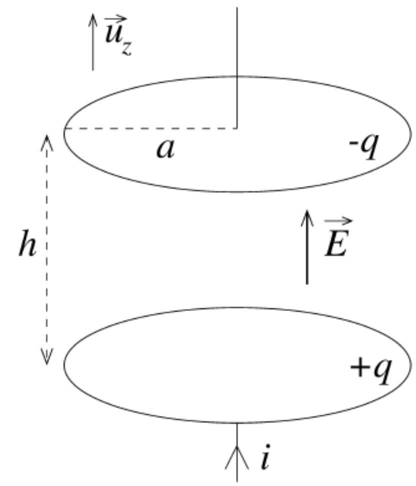
Un conducteur ohmique de conductivité γ a la forme d'un cylindre infini de rayon a et d'axe O_z (figure 1). Ce conducteur est parcouru dans tout son volume par un courant I. Le régime est stationnaire.



1. Calculer le champ électrique dans le conducteur.
2. Calculer le champ magnétique dans le conducteur.
3. Que vaut le vecteur de Poynting ? On désire réaliser un bilan d'énergie électromagnétique dans un cylindre de rayon a et de hauteur h.
4. Calculer la puissance électromagnétique $P_{\text{rayonnée}}$ entrant dans le système. Commenter son sens.
5. Calculer la puissanceP_{charges} cédée par le champ électromagnétique aux charges. Interpréter ce résultat à l'aide de l'effet Joule.
6. Vérifier le bilan global d'énergie électromagnétique dans le système.

2.2 Condensateur dans l'ARQS•

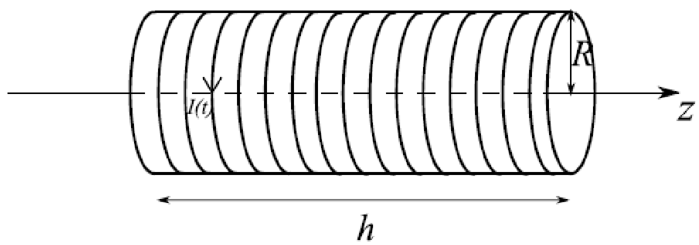
On considère un condensateur plan cylindrique, de rayon a et de hauteur h. Le vide règne entre les plaques. On note $q(t)$, sa charge,$U(t)$ sa tension, S sa section. On néglige les effets de bord : entre les plaques, le champ est le même que si les plaques étaient infinies, soit $\vec{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$, où $\sigma(t)$ est la densité surfacique de charge.



1. En étudiant les symétries et invariances, montrer que le champ magnétique est de la forme $\vec{B}(M) = B(r,z,t)\vec{e}_\theta$.
2. (a) Pourquoi dans l'équation de Maxwell-Ampère, le terme en $\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ ne peut-il pas être négligé, bien que l'on soit dans le cadre de l'ARQS ?
   (b) En utilisant le théorème d'Ampère généralisé (forme intégrale de l'équation de Maxwell Ampère), déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$.
3. (a) Calculer le vecteur de Poynting.
   (b) En déduire la puissance rayonnée à travers le cylindre dessiné par le condensateur.
4. (a) Calculer la densité d'énergie électrique u_e et en déduire l'énergie électrique E_e comprise dans le cylindre.
   (b) Calculer la densité d'énergie magnétique u_m et en déduire l'énergie magnétique E_m comprise dans le cylindre.
5. Montrer que le rapport $\frac{E_m}{E_e}$ est négligeable dans le cadre de l'ARQS et en déduire l'énergie électromagnétique E_{em} comprise dans le cylindre.
6. Que vaut la puissance cédée par le champ électromagnétique entre les plaques ?
7. Vérifier le bilan de puissance électromagnétique.

2.3 Solénoïde infini dans l'ARQS•

On considère un solénoïde infini, d'axe O_z, de rayon R, comportant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant $I(t)$. On supposera que ce problème peut se traiter dans le cadre de l'ARQS.



1. Rappeler ce qu'est l'ARQS.
2. Ecrire les équations de Maxwell dans cette approximation à l'intérieur du solénoïde.
3. Que vaut le champ magnétique dans le solénoïde ?
4. Expliquer pourquoi le champ électrique est nécessairement non nul.
5. Intégrer l'équation de Maxwell-Faraday sur un disque de rayon $r < R$ et en déduire l'expression du champ électrique dans le solénoïde. On désire maintenant réaliser un bilan d'énergie électromagnétique dans un cylindre de rayon R et de hauteur h.
6. Donner l'expression du vecteur de Poynting.
7. Quelle est l'énergie électromagnétique $U(t)$ contenue dans le cylindre à l'instant t ?
8. Montrer que l'énergie magnétique est prépondérante par rapport à l'énergie électrique dans l'hypothèse de l'ARQS. On supposera désormais que c'est le cas.
9. Quelle est la puissance électromagnétique entrante rayonnée à l'intérieur du cylindre ?
10. Quelle est la puissance cédée par le champ électromagnétique aux charges dans le cylindre ?
11. Réaliser un bilan d'énergie sur le cylindre. Commenter le sens du vecteur de Poynting.