

DS n°6

PSI 2022/2023

Durée 4 heures - Calculatrices **autorisées**

Partie 1 : Conditionnement d'un signal d'un capteur de position

□ 1 — Un ALI idéal possède deux caractéristiques principales :

- Son impédance d'entrée est infinie : les courants de polarisation sont nuls $i_+ = i_- = 0$
- Son impédance de sortie est nulle.

On étend souvent ce modèle en supposant le gain différentiel infini en régime linéaire ($\varepsilon = 0$ en régime linéaire). Néanmoins il est possible d'étudier un ALI idéal de gain fini (voir début du cours sur les ALI).

On peut dire que :

- Les ALI (A1) et (A2) fonctionnent *à priori* en régime linéaire car leur rétroaction est effectuée sur la borne inverseuse.
- L'ALI (A3) fonctionne *nécessairement* en régime saturé car sa rétroaction a lieu sur la borne non-inverseuse.

□ 2 — On considère l'ALI (A1). Le régime est *a priori* linéaire donc $\varepsilon = 0$.

La borne non-inverseuse est reliée à la masse donc : $v_{+1} = 0$ (potentiel de la borne non-inverseuse). On en déduit donc que $v_{-1} = 0$, donc d'après la loi des nœuds en termes de potentiels appliquée à la borne $\ominus$:

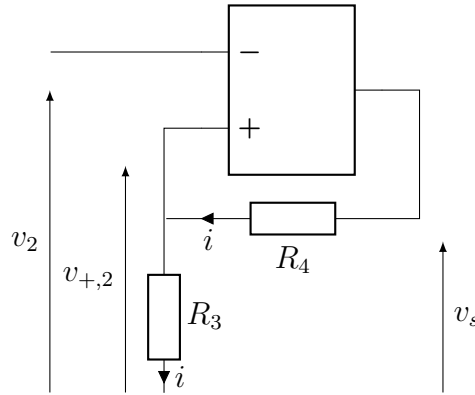
$$0 = v_{-1} = \frac{\frac{v_e}{R_1} + \frac{v_1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Leftrightarrow \frac{v_e}{R_1} = -\frac{v_1}{R_2} \Leftrightarrow \boxed{v_e(t) = -\frac{R_1}{R_2}v_1(t)}$$

On considère l'ALI (A2). Le régime est *a priori* linéaire donc $\varepsilon = 0$.

La borne non-inverseuse est reliée à la masse donc : $v_{+2} = 0$ (potentiel de la borne non-inverseuse). On en déduit donc que $v_{-2} = 0$, donc d'après la loi des nœuds en termes de potentiels appliquée à la borne $\ominus$ utilisée en régime sinusoïdal forcé :

$$0 = v_{-2} = \frac{\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{1/j\omega C}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{1/j\omega C}} \Leftrightarrow \frac{v_1}{R} = -v_2 j\omega C \Leftrightarrow \boxed{v_1(t) = -RC \frac{dv_2}{dt}(t)}$$

□ 3 — Refaisons un petit schéma :



En utilisant un pont diviseur de tension, on a :

$$v_{+,2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} v_s$$

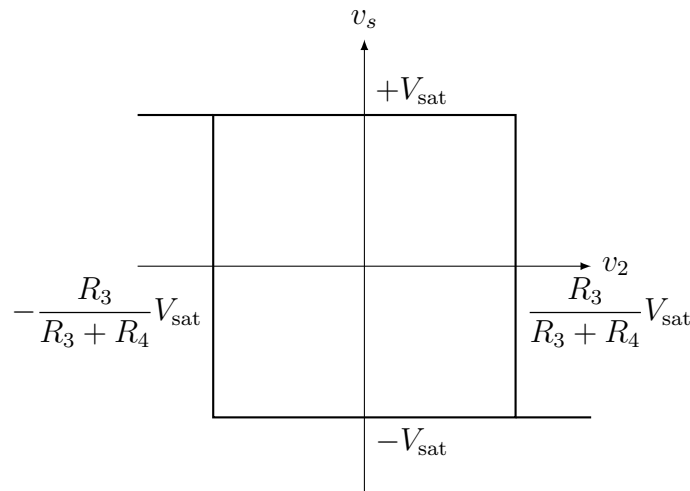
On en déduit donc :

$$\varepsilon_2 = v_{+,2} - v_{-,2} = v_s \frac{R_3}{R_3 + R_4} - v_2$$

$v_s = +V_{\text{sat}}$ tant que $\varepsilon_2 > 0$, c'est à dire tant que $v_2 < V_{\text{lim}} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{\text{sat}}$. $v_s = -V_{\text{sat}}$ tant que $\varepsilon_2 < 0$, c'est à dire tant que $v_2 > -V_{\text{lim}}$.

Ainsi, procédons en suivant un chemin :

- Si $v_2 < -V_{\text{lim}}$, $v_s = +V_{\text{sat}}$. Ensuite v_2 augmente jusqu'à $V_{\text{lim}} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{\text{sat}}$. À partir de cette valeur, v_2 continue d'augmenter mais $v_s = -V_{\text{sat}}$ car ε devient négatif.
- Ensuite, v_2 diminue jusqu'à $-V_{\text{lim}}$ à partir d'où $v_s = +V_{\text{sat}}$ et v_2 continue de diminuer dans les valeurs négatives.



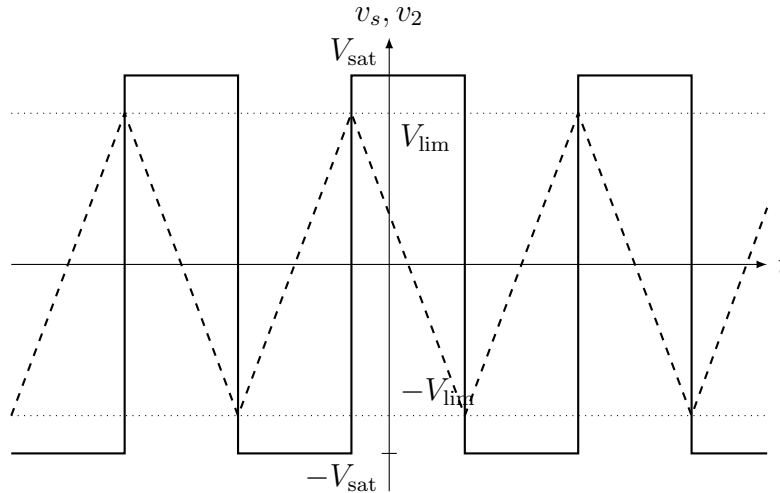
□ 4 — D'après la figure 2, on observe que $v_s(t) = v_e(t)$, on en déduit, d'après les questions précédentes :

$$v_1(t) = -\frac{R_2}{R_1} v_s(t) \quad \text{soit} \quad \frac{dv_2}{dt}(t) = \frac{R_2}{R_1 R_2 RC} v_s(t)$$

$$\text{Lorsque } v_s(t) = +V_{\text{sat}}, \text{ alors } v_2(t) = -\frac{R_2}{R_1 RC} V_{\text{sat}} t + V_{\text{lim}}.$$

$$\text{Lorsque } v_s(t) = -V_{\text{sat}}, \text{ alors } v_2(t) = \frac{R_2}{R_1 RC} V_{\text{sat}} t - V_{\text{lim}}.$$

On en déduit le tracé suivant :



v_2 est visiblement une fonction triangulaire périodique du temps de même période que v_s . On en déduit donc que $\frac{T}{2}$ est la durée pour passer de $+V_{\text{lim}}$ à $-V_{\text{lim}}$.

En posant $t = 0$ tel que :

$$\begin{cases} v_2(0) = V_{\text{lim}} \\ v_2(\frac{T}{2}) = -V_{\text{lim}} \end{cases} \Rightarrow 2V_{\text{lim}} = v_2(0) - v_2\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{R_2}{R_1 RC} V_{\text{sat}} \frac{T}{2}$$

On obtient :

$$T = 4 \frac{R_3 R_1 RC}{R_2 (R_3 + R_4)}$$

□ 5 — $T = \frac{1}{f}$ (f la fréquence du signal) donc :

$$C = \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{4 R R_3 R_1 f} = \frac{R_3 + R_4}{4 R R_3 f}$$

L'application numérique donne : $C = 0,25 \mu\text{F}$.

La modification de la fréquence est possible en plaçant une résistance variable sur R .

D'après nos raisonnements précédents, $E = V_{\text{lim}}$:

$$E = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{\text{sat}}$$

Cette amplitude est modifiée à l'aide des résistances R_3 et R_4 .

Pour obtenir le rapport désiré, il faut :

$$0,22 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \quad \text{soit} \quad \frac{R_3}{R_4} = 0,28$$

On obtient alors $E = 4,23 \text{ V}$

□ 6 — D'après le schéma :

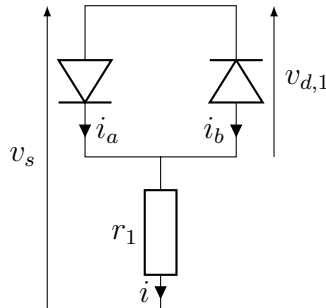
$$\left. \begin{array}{l} \frac{v_t(1/4)}{E} = 1 \\ \frac{v_t(0)}{E} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v_t(\theta)}{E} = 4\theta$$

Ainsi :

$$\text{Pour } 0 \leq \frac{t}{T} \leq \frac{1}{4}, \quad \boxed{v_t(\theta) = 4\theta E}$$

□ 7 — Supposons que les deux diodes conduisent le courant simultanément. On en déduit donc que la tension à leurs bornes est à la fois **strictement** inférieure et égale à $U_s > 0$. Cette incohérence nous conduit donc à affirmer que l'une des deux seulement peut être passante.

Introduisons quelques notations :



Remarquons d'abord que pour $v_s > 0$, la diode orientée vers le haut ne peut pas conduire car la tension à ses bornes en convention récepteur est négative. Supposons par ailleurs que la diode orientée vers le bas est bloquée. Dans ce cas, aucun courant ne circule dans r_1 et on a $u_{d,1}(t) = v_s(t)$. Or, ceci ne peut être vrai que si $v_s(t) < U_1$. On a donc : $\boxed{U_s = U_1}$. Si la diode orientée vers le bas conduit, on a :

$$v_s = U_1 + r_1 i \geq U_s \quad \text{avec } i > 0$$

□ 8 — Par un raisonnement similaire :

- Les deux diodes orientées vers le haut sont nécessairement bloquées tant que $v_s > 0$.
- Les deux diodes orientées vers le bas sont bloquées tant que $v_s < 2U_s$. La valeur de U_2 est donc : $\boxed{U_2 = 2U_s}$.
- Lorsque les deux diodes orientées vers le bas conduisent, on a :

$$v_s = 2U_s + r_1 i \geq U_s \quad \text{avec } i > 0$$

□ 9 — La tension maximale atteinte par la tension aux bornes d'une diode est U_s d'après l'énoncé. On en déduit donc, par additivité des tensions, que la tension maximale de la cellule (3) est de $\boxed{V_{\max} = 3U_s}$.

□ 10 — En $\theta = 0$, $s(\theta) \sim V_{\max} 2\pi\theta$, or, $v_t(\theta) = 4\theta E$, on veut donc :

$$3U_s \times 2\pi = 4E \quad \text{soit} \quad \boxed{U_s = \frac{2E}{3\pi}}$$

On peut reformuler cela avec le rapport :

$$\boxed{\frac{E}{U_s} = \frac{3\pi}{2}}$$

□ 11 — Si $v_s < U_1$, alors $i = 0$ et $i_s = 0$ d'après l'énoncé. On en déduit donc que :

$$v_s = v_t = 4\theta E \quad (\text{aucun courant ne traverse } r_0)$$

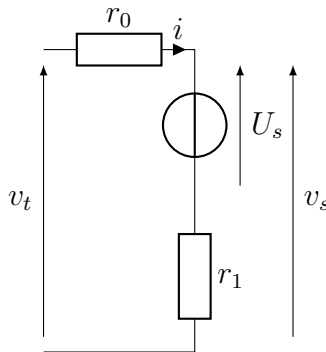
On cherche alors θ_1 tel que :

$$v_s(\theta_1) = U_1 \quad \text{soit} \quad 4\theta_1 E = U_1 = U_s$$

Ainsi :

$$\boxed{\theta_1 = \frac{U_s}{4E} = \frac{1}{6\pi}} \quad \text{d'après la condition précédemment établie}$$

□ 12 — Ici, $U_1 < v_s < U_2$, donc r_1 est alimentée mais pas r_2 . Pour plus de lisibilité, on peut remplacer la diode passante par un générateur de tension continue de valeur U_s . On a alors le montage suivant :



On a les deux relations :

$$\begin{cases} v_t &= v_s + r_0 i \\ v_s &= U_s + r_1 i \end{cases}$$

En substituant, on en déduit :

$$v_t = v_s + \frac{r_0}{r_1}(v_s - U_s) \Rightarrow \boxed{v_s = \frac{v_t + U_s \frac{r_0}{r_1}}{1 + \frac{r_0}{r_1}}}$$

soit encore :

$$\boxed{v_s(\theta) = \frac{4\theta E + U_s \rho_1}{1 + \rho_1}}$$

Dérivons les expressions :

$$\frac{ds}{d\theta}(\theta) = 3U_s \times 2\pi \cos(2\pi\theta) \quad \text{d'où} \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^+} \left(\frac{ds}{d\theta} \right) = 6U_s \pi \cos\left(\frac{1}{3}\right)$$

et :

$$\frac{dv_s}{d\theta}(\theta) = \frac{4E}{1 + \rho_1}$$

On en déduit, pour vérifier la relation indiquée dans l'énoncé :

$$\frac{4E}{1 + \rho_1} = 6U_s \pi \cos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Ainsi, on obtient :

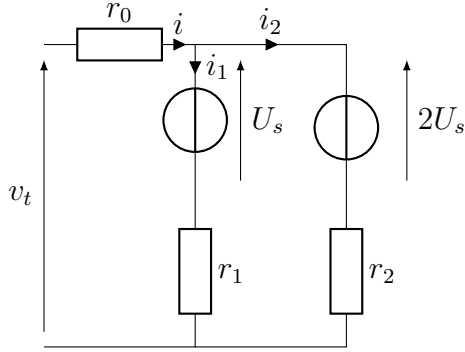
$$\boxed{\rho_1 = \frac{1}{\cos(\frac{1}{3})} - 1}$$

Compte-tenu de la définition de θ_2 , on peut écrire :

$$v_s(\theta_2) = U_2 = \frac{4\theta_2 E + \rho_1 U_s}{1 + \rho_1} \Rightarrow \theta_2 = \frac{U_s(2 + 2\rho_1 - \rho_1)}{4E} = (2 + \rho_1)\theta_1$$

On pose alors : $\alpha = 2 + \rho_1$ soit $\boxed{\alpha = \frac{1}{\cos \frac{1}{3}} + 1}$

□ 13 — Désormais, on a : $U_s < v_s < 3U_s$. Le circuit devient alors :



La façon la plus simple est d'utiliser un espèce de théorème de Millman :

$$\begin{aligned} i = i_1 + i_2 &\Rightarrow \frac{v_t - v_s}{r_0} = \frac{v_s - U_s}{r_1} + \frac{v_s - 2U_s}{r_2} \\ &\Rightarrow v_s \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = v_t + \frac{U_s}{r_1} + \frac{2U_s}{r_2} \\ &\Rightarrow v_s = \frac{v_t + U_s \frac{r_0}{r_1} + 2 \frac{r_0}{r_2} U_s}{1 + \frac{r_0}{r_1} + \frac{r_0}{r_2}} \\ &\Rightarrow \boxed{v_s = \frac{4E\theta + U_s \frac{r_0}{r_1} + 2 \frac{r_0}{r_2} U_s}{1 + \frac{r_0}{r_1} + \frac{r_0}{r_2}}} \end{aligned}$$

□ 14 — Si $\theta > \theta_3$, comme v_s augmente et a atteint la valeur $V_{\max}$, sa valeur est bloquée à $3U_1$.

□ 15 — Les écarts peuvent être réduits en rajoutant des étapes. Ici, le système est constitué de 3 étapes mais en rajoutant plusieurs (à 4 diodes, à 5 etc...), on peut affiner l'approximation du signal désiré.

Problème 2 : Générateur à aimants d'une éolienne Daerrius

□ 17 — On identifie les plans de symétrie : $\Pi_+ = (Oyz)$ et d'antisymétrie $\Pi_- = (Ozx)$ des courants, ce qui permet d'écrire dans l'entrefer dans lequel $\vec{B} = B(\theta)\vec{e}_r$

—pour deux points $M(\theta)$ et $M'(\theta' = -\theta)$ symétriques par rapport à Π_a :

$$B(-\theta) = B(\theta)$$

—pour deux points $M(\theta)$ et $M'(\theta' = \pi - \theta)$ symétriques par rapport à Π_s :

$$B(\pi - \theta) = -B(\theta)$$

On considère alors la ligne de champ orientée dans le sens direct traversant l'entrefer à l'angle $0 < \theta < \pi/2$. Le théorème d'Ampère appliqué à cette ligne de champ s'écrit, dans l'hypothèse de milieux ferromagnétiques idéaux ($H_{\text{ferro}} = 0$) :

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\frac{D_i}{2}}^{\frac{D_i}{2}+e} H(\theta) \vec{e}_r \cdot d\vec{r} \vec{e}_r + \int_{\frac{D_i}{2}+e}^{\frac{D_i}{2}} H(\pi - \theta) \vec{e}_r \cdot d\vec{r} \vec{e}_r = H(\theta)e - H(\pi - \theta)e = 2H(\theta)e$$

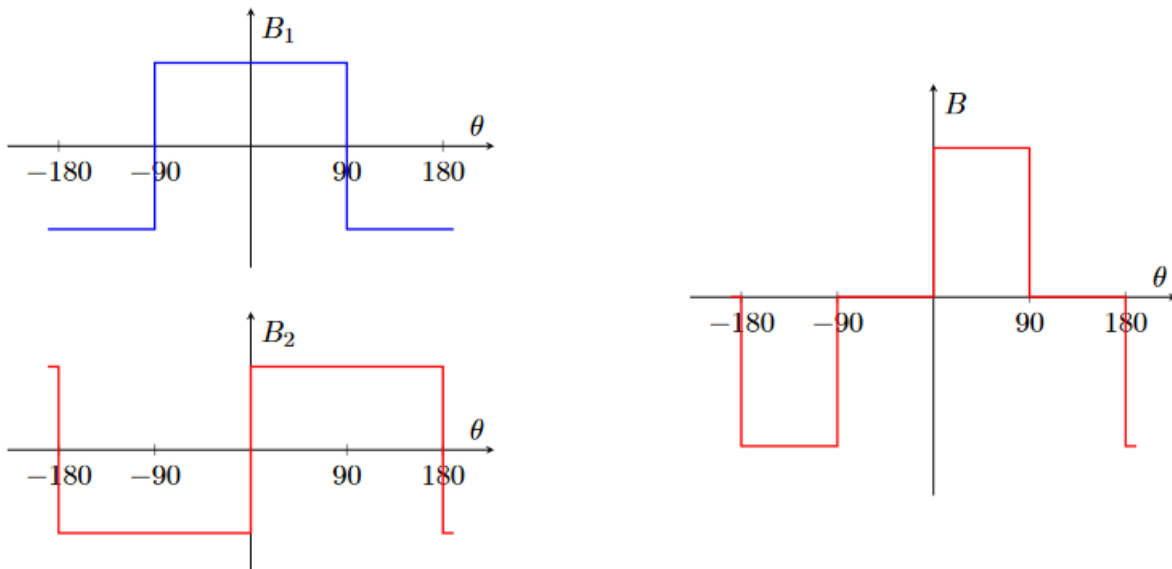
D'après la relation constitutive de l'air, $H_{\text{entrefer}} = B_{\text{entrefer}}/\mu_0$, soit finalement :

$$B(0 < \theta < \pi/2) = \frac{\mu_0 I}{2e}$$

En utilisant une dernière fois les symétries, on obtient la forme du champ dans l'entrefer :

$$\begin{aligned} B\left(\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\mu_0 I}{2e} \vec{e}_r \text{ (dirigé vers l'extérieur pour } I > 0) \\ B\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right) &= -\frac{\mu_0 I}{2e} \vec{e}_r \text{ (dirigé vers l'intérieur pour } I > 0) \end{aligned}$$

□ 18 — La seconde spire est obtenue par rotation de $\pi/2$ autour de Oz de la première spire, donc la courbe de $B_2(\theta)$ se déduit de la courbe $B(\theta)$ par une translation de $\pi/2$. On trace donc les courbes $B_1(\theta)$ et $B_2(\theta)$ pour les deux spires 1 (axe x) et 2 (axe y), puis la courbe représentative du champ total B par superposition des champs de chaque spire.



□ 19 — Si la puissance est constante, la tension et l'intensité traversant l'enroulement sont constantes, d'où $P = UI$ et

$$I = \frac{P}{U} = 21,7\text{A}$$

En reportant cette valeur dans l'expression du champ maximal, on trouve

$$B_{\text{max}} = \frac{\mu_0 N I}{2e} = 0,143\text{T}$$

□ 20 — Pour un même courant, le champ $\vec{B}_{s2}$ se déduit de $\vec{B}_{s1}$ par une rotation de $\pi/2$ dans le sens direct puisque $\vec{B}_{s2}(I, \theta) = \vec{B}_{s1}(I, \theta - \pi/2)$. Il suffit d'utiliser un enroulement semblable à celui créant $\vec{B}_{s1}$, tourné par rapport à ce dernier de $\pi/2$ autour de Oz dans le sens direct.

□ 21 — Le champ total s'écrit :

$$\vec{B}_s = \vec{B}_{s1} + \vec{B}_{s2} = \frac{N\mu_0 I_s}{2e} (\cos(\theta) \cos(\omega_s t) + \sin(\theta) \cos(\omega_s t - \phi_2)) \vec{e}_r$$

Si on veut obtenir un champ glissant dans le sens direct, l'intensité traversant l'enroulement (2) doit être en quadrature retard sur l'intensité traversant l'enroulement (1) : on choisit $\phi_2 = \pi/2$, ce qui conduit à l'expression

$$\begin{aligned} \vec{B}_s &= \frac{N\mu_0 I_s}{2e} \left(\cos(\theta) \cos(\omega_s t) + \sin(\theta) \cos\left(\omega_s t - \frac{\pi}{2}\right) \right) \vec{e}_r \\ \vec{B}_s &= \frac{N\mu_0 I_s}{2e} (\cos(\theta) \cos(\omega_s t) + \sin(\theta) \sin(\omega_s t)) \vec{e}_r = \frac{N\mu_0 I_s}{2e} \cos(\theta - \omega_s t) \vec{e}_r \end{aligned}$$

Par identification :

$$B_t = \frac{N\mu_0 I_s}{2e}$$

□ 22 — On exprime la densité volumique d'énergie magnétique dans l'entrefer :

$$w_{\text{mag}} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \frac{(\vec{B}_s + \vec{B}_r)^2}{2\mu_0} = \frac{B_t^2 \cos^2(\theta - \phi_s) + B_r^2 \cos^2(\theta - \phi_r) + 2B_t B_r \cos(\theta - \phi_s) \cos(\theta - \phi_r)}{2\mu_0}$$

On linéarise cette expression avant de l'intégrer sur le volume de l'entrefer :

$$w_{\text{mag}} = \frac{B_t^2 (1 + \cos(2(\theta - \phi_s))) + B_r^2 (1 + \cos(2(\theta - \phi_r))) + 2B_t B_r (\cos(\phi_r - \phi_s) + \cos(2\theta - \phi_r - \phi_s))}{4\mu_0}$$

L'énergie magnétique s'obtient en intégrant la densité volumique d'énergie sur le volume de l'entrefer :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint w_{\text{mag}}(\theta) r dr d\theta dz$$

Comme w_{mag} ne dépend que de θ , les intégrales sur z et r sont directes :

$$\int_{z_0}^{z_0+L_r} dz \int_{\frac{D_i}{2}}^{\frac{D_i}{2}+e} r dr = L_r \frac{(D_i/2 + e)^2 - (D_i/2)^2}{2} = L_r \frac{D_i e + e^2}{2} \approx \frac{L_r D_i e}{2}$$

Il reste donc

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{L_r D_i e}{2} \int_0^{2\pi} w_{\text{mag}} d\theta$$

L'expression de w_{mag} fait apparaître deux types de termes :

- des constantes, qui sont simplement multipliées par 2π dans l'intégration
- des termes de la forme $\cos(2\theta + \phi)$ de période π . Ces termes sont intégrés sur deux périodes ce qui conduit à une intégrale nulle

On obtient finalement :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{L_r D_i e}{2} \frac{2\pi}{4\mu_0} (B_t^2 + B_r^2 + 2B_t B_r \cos(\phi_r - \phi_s)) = \frac{\pi L_r D_i e}{4\mu_0} (B_t^2 + B_r^2 + 2B_t B_r \cos(\phi_r - \phi_s))$$

et après avoir exprimé $B_t = \frac{\mu_0 N I_s}{2e}$

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{\pi L_r D_i e}{4\mu_0} \left(\left(\frac{\mu_0 N I_s}{2e} \right)^2 + B_r^2 + 2 \left(\frac{\mu_0 N I_s}{2e} \right) B_r \cos(\phi_r - \phi_s) \right)$$

□ 23 — Le couple exercé sur le rotor a pour expression

$$\Gamma = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial \phi_r} = -\frac{\pi L_r D_i e}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 N I_s}{2e} \right) B_r \sin(\phi_r - \phi_s)$$

soit après simplifications, et introduction de $\delta = \phi_r - \phi_s$

$$\Gamma = -\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\phi_r - \phi_s) = -\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta)$$

Pour $\delta > 0$, le rotor est en avance sur le champ statorique, donc la machine fonctionne en génératrice : le couple magnétique est opposé au mouvement car il y a conversion d'énergie mécanique (l'énergie associée au couple permettant de vaincre le couple magnétique et obtenir le mouvement du rotor) en énergie électrique.

□ 24 — Pour les valeurs données : $N = 21$, $D_i = 0,53\text{m}$, $L_r = 0,3\text{m}$, $I_s = 22\text{A}$ et $B_r = 1,2\text{T}$, le couple maximal obtenu pour $\delta = \pi/2$ (rotor en quadrature avance) vaut $\boxed{69\text{N.m}}$.

□ 25 — On peut citer directement la relation de conversion d'énergie électromécanique : la puissance des forces électromotrices dans les bobines statoriques est exactement opposée à la puissance du couple magnétique calculée précédemment :

$$-\Gamma \omega_r = E_1 I_1 + E_2 I_2$$

Sinon, qualitativement on peut aussi remarquer que les deux forces électromotrices sont proportionnel au champ rotorique B_r à ω_r et à la surface de l'entrefer ce qui est normal vu que le rotor est le circuit inducteur. Par ailleurs, on peut remarquer que les deux fém sont en quadrature ce qui est normal vu la disposition des enroulements statoriques.

□ 26 — On utilise la loi des mailles et on passe en complexe :

La loi des mailles s'écrit en notation complexe :

$$\underline{E}_i = (R + R_u + jL\omega_s)\underline{I}$$

Les E_i s'écrivent en notation complexe

$$E_1 = E_0 \sin(\phi_r) \rightarrow \underline{E}_1 = E_0 e^{j(\phi_r - \pi/2)} ; E_2 = -E_0 \cos(\phi_r) \rightarrow \underline{E}_2 = -E_0 e^{j\phi_r}$$

d'où

$$\underline{I}_1 = \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4} \frac{e^{j(\phi_r - \pi/2)}}{R + R_u + jL\omega_r} ; \underline{I}_2 = -\frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4} \frac{e^{j\phi_r}}{R + R_u + jL\omega_r}$$

□ 27 — Les résultats précédents doivent s'identifier à $I_1 = I_s \cos(\phi_s)$ et $I_2 = I_s \sin(\phi_s)$. Pour cela, il faut séparer totalement amplitude et phase dans les expressions précédentes :

$$\underline{I}_1 = \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}} e^{j(\phi_r - \pi/2 - \varphi)} ; \underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-j\pi/2}$$

avec

$$\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega_r}{R + R_u}\right)$$

On en déduit :

$$I_s = \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}} \text{ et } \phi_r - \frac{\pi}{2} - \varphi = \phi_s$$

soit

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \varphi ; \varphi = \arctan \left(\frac{L\omega_r}{R + R_u} \right)$$

On en déduit l'expression du champ magnétique statorique (Q21) :

$$\vec{B}_t = \frac{N\mu_0 I_s}{2e} \cos(\theta - \phi_s) \vec{e}_r = \frac{N\mu_0}{2e} \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4 \sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}} \cos(\theta - \phi_s) \vec{e}_r$$

Puis celle du couple (Q23)

$$\Gamma = -\frac{\pi N D_i L_r B_r I_s}{4} \sin(\delta) = -\left(\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \right)^2 \omega_r \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi)}{\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}}$$

et en exprimant $\cos \varphi = (R + R_u) / \sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}$:

$$\Gamma = -\left(\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \right)^2 \omega_r \frac{R + R_u}{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}$$

□ 28 — La relation $P = U^2 / R_u$ permet de calculer $R_u = U^2 / P = 10,6 \Omega$

La loi des mailles permet alors d'obtenir la valeur efficace des forces électromotrices :

$$U = R_u I_s ; E = \sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2} I_s : E_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2}}{R_u} U = 286 \text{V}$$

soit en amplitude $E = 404 \text{V}$

On en déduit alors :

$$|\Gamma| = \left(\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \right)^2 \omega_r \frac{R + R_u}{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2} = \frac{2E_{\text{eff}}^2}{\omega_r} \frac{R + R_u}{(R + R_u)^2 + (L\omega_r)^2} = 34,8 \text{N.m}$$

□ 29 — La période spatiale du champ rotorique vaut $2\pi/p$, donc chaque fois que le rotor tourne d'un angle $2\pi/p$, les bobines statoriques subissent la même interaction avec le rotor, ce qui correspond à une période des phénomènes électriques au stator. Par conséquent la pulsation ω_s vérifie $\omega_s = p\omega_r$ et pour une fréquence $f_s = 50 \text{Hz}$:

$$\omega_r = \frac{\omega_s}{p} = \frac{2\pi f_s}{p} = 26 \text{rad.s}^{-1}$$

IV Aimants des rotors

□ 30 — La masse d'oxyde de néodyme contenue dans une tonne de minerai est comprise entre $0,6 \times 0,15 \times 1000 = 90 \text{kg}$ et $0,7 \times 0,15 \times 1000 = 105 \text{kg}$. La fraction massique de néodyme dans le minerai vaut

$$\frac{2\mathcal{M}(\text{Nd})}{2\mathcal{M}(\text{Nd}) + 3\mathcal{M}(\text{O})} = \frac{2 \times 144,2}{2 \times 144,2 + 3 \times 16} = 0,857$$

d'où la masse de néodyme par tonne de minerai

$$77 \text{kg} < m < 90 \text{kg}$$

□ 31 — On a les nombres d'oxydation suivants :

Fe	Fe ²⁺	Fe ³⁺	Fe ₂ O ₃
0	II	III	III

Par ailleurs, on peut dire que :

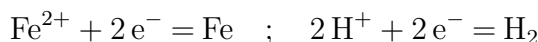
—corrosion : Fe²⁺, Fe³⁺

—passivation : Fe₂O₃

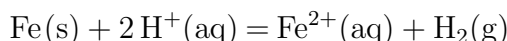
—immunité : Fe

□ **32** — En l'absence de dioxygène dissous et en milieu acide, l'oxydation du fer conduit à Fe²⁺ stable en présence d'eau :

—demi-réactions associées :



—équation-bilan (2 électrons échangés) :

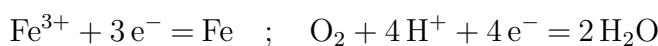


—constante d'équilibre :

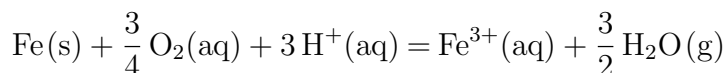
$$\log K^0 = \frac{2(E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) - E^0(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}))}{0,06} = 14,7 \quad ; \quad \boxed{K^0 = 10^{14,7}}$$

En présence de dioxygène dissous et en milieu acide (pH < 1,67), l'oxydation du fer conduit à Fe³⁺ car Fe²⁺ n'est pas stable en présence de O₂. Les demi-réactions associées sont :

—demi-réactions associées :

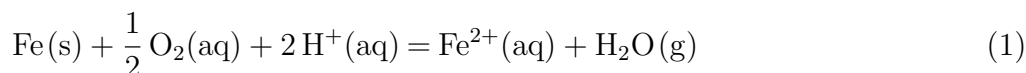


—équation-bilan (pour un coefficient stœchiométrique pour le fer égal à 1, soit 3 électrons échangés) :



—On n'a pas la donnée du potentiel standard du couple Fe³⁺/Fe. On va donc passer par une étape intermédiaire :

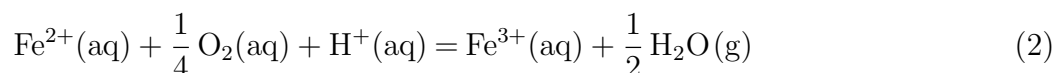
•Oxydation du Fe en Fe²⁺ au contact du dioxygène :



de constante K_1 telle que :

$$\log K_1^0 = \frac{2(E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) - E^0(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}))}{0,06} = 55,7$$

•Oxydation du Fe²⁺ en Fe³⁺ au contact du dioxygène :



de constante K_2 telle que :

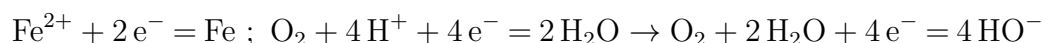
$$\text{Fe}^{2+} + \frac{1}{4}\text{O}_2 + \text{H}^+ = \text{Fe}^{3+} + \frac{1}{2}\text{H}_2\text{O} \quad : \quad \log K_2^0 = \frac{(E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) - E^0(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}))}{0,06} = 7,7$$

d'où :

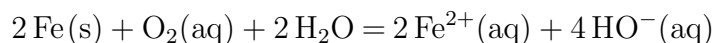
$$K = K_1 \times K_2 = 10^{63,4}$$

Les deux réactions sont totales. Le fer est fortement corrodé au contact de l'eau ou de l'air.

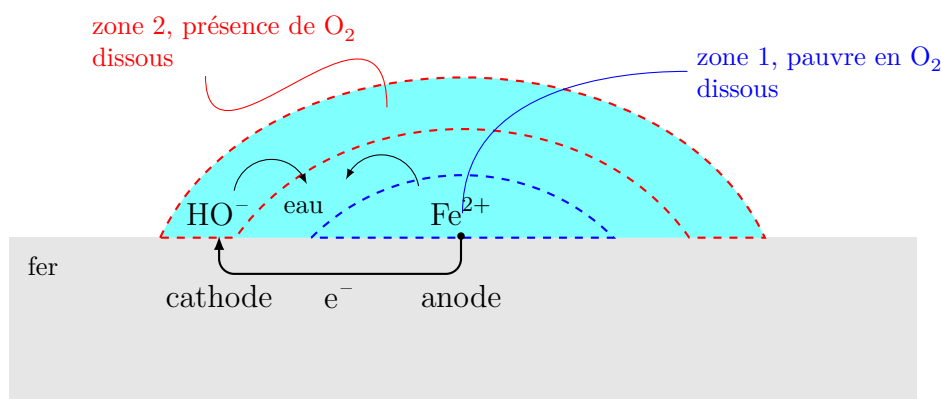
□ 33 — Les nouvelles demi-équations sont



soit l'équation-bilan



- La réduction du dioxygène se produit dans la zone où sa concentration est la plus forte (zone de potentiel le plus élevé, cathode), donc en périphérie de la goutte, en contact avec le fer pour permettre l'échange électronique ;
- l'oxydation du fer se produit dans la zone centrale de la goutte (potentiel le plus bas, puisque la concentration de dioxygène est la plus faible, anode).

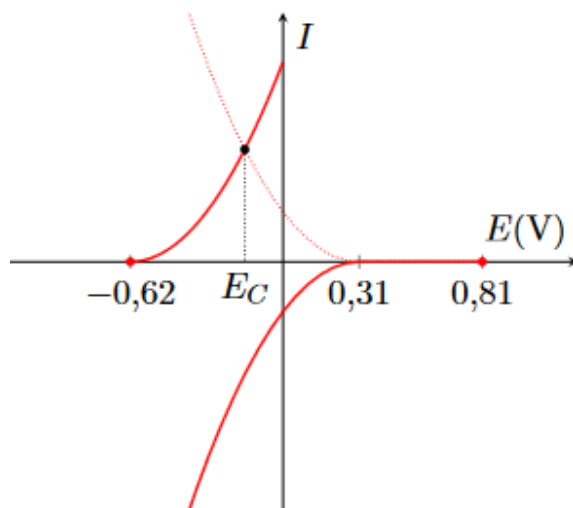


□ 34 — On calcule les potentiels (et non les potentiels standards !) à l'équilibre. Pour l'oxygène dissous, en l'absence de données thermodynamiques, on suppose que son activité vaut 1 comme d'habitude. Par contre, on fera attention à prendre en compte le pH de la solution.

$$E(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) + \frac{0,06}{4} \log (a(\text{O}_2)[\text{H}^+]^4) \approx 1,23 - 0,06\text{pH} = 0,81\text{V}$$

$$E(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = E^0(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + 0,03 \log [\text{Fe}^{2+}] = -0,62\text{V}$$

D'où le tracé des courbes intensité-potentiel, en tenant compte de la surtension :



Si les courbes sont symétriques, le potentiel de corrosion, égal au potentiel pour lequel les intensités anodique et cathodique sont exactement égales en valeur absolue, correspond à la moyenne des potentiels pour lesquels les courbes décollent de l'axe des abscisses. On obtient :

$$E_c = \frac{(0,81 - 0,5) - 0,62}{2} = -0,155V$$

□ 35 — En milieu marin, l'eau est plus conductrice du fait des sels dissous, donc la résistance interne plus faible. Comme les pentes des courbes intensité-potentiel sont plus fortes, le courant de corrosion correspondant à E_c est plus fort, donc la corrosion plus rapide.

□ 36 — On comprend d'après le sujet qu'à la cathode se déroule la demi-réaction de réduction du nickel, $Ni^{2+} + 2e^- = Ni$.

—Il faut donc 2 électrons pour déposer un atome de Nickel sur le métal. On en déduit la relation

$$I\Delta t = Q = n(e^-)\mathcal{F} = 2\mathcal{F}n(Ni)$$

—La quantité de nickel formé est liée aux caractéristiques du dépôt par la relation

$$n(Ni) = \frac{m(Ni)}{\mathcal{M}(Ni)} = \frac{\rho(Ni)V_{\text{dépôt}}}{\mathcal{M}(Ni)} = \frac{\rho(Ni)S_r h}{\mathcal{M}(Ni)}$$

—On en déduit la relation

$$I\Delta t = 2 \frac{\rho(Ni)S_r h}{\mathcal{M}(Ni)}$$

soit

$$\Delta t = \frac{2\mathcal{F}\rho(Ni)S_r h}{\mathcal{M}(Ni)I} = 23000s = 6h20min$$

□ 37 — La surtension cathodique représente la surtension entre le potentiel de corrosion et le potentiel d'équilibre donné par la formule de Nernst : $\eta = E_C - E(Ni^{2+}/Ni)$. D'après la demi-réaction rédox (question précédente), le potentiel d'équilibre pour le nickel vaut pour $[Ni^{2+}] = C_0 = 1\text{mol.L}^{-1}$:

$$E(Ni^{2+}/Ni) = E^0(Ni^{2+}/Ni) + \frac{0,06}{2} \log C_0 = E^0(Ni^{2+}/Ni) = -0,25V$$

On en déduit la surtension cathodique :

$$\eta = -0,25V$$

Ce qui permet de calculer la densité de courant pour la formation du nickel :

$$\log |j_{Ni}| = \frac{-0,25 + 0,30}{-0,15} = -0,33 \quad : \quad |j_{Ni}| = 0,464A.dm^{-2}$$

puis l'intensité utile associée

$$I_u = S_r |j_{Ni}| = 2,92A$$

Tous les autres facteurs étant identiques, on peut relier les épaisseurs théorique et idéale du dépôt formé (proportionnelles d'après la question précédente à l'intensité) :

$$\frac{h_{\text{réel}}}{h_{\text{théorique}}} = \frac{I_u}{I} \quad : \quad h_{\text{réel}} = \frac{I_u}{I} h_{\text{théorique}} = 36,6\mu m$$

La réaction parasite est vraisemblablement la réduction de l'eau en dihydrogène. On calcule le potentiel d'équilibre dans les conditions de l'électrolyse ($pH = 4,5$, $p(H_2) = p^0$) : $E_{eq} = E^0(H^+/H_2) - 0,06pH = -0,27V$: si la surtension cathodique sur électrode de fer n'est pas trop importante cette réaction peut être cinétiquement comparable à celle de la réduction des ions Ni^{2+} .

□ **38** — Le fer est plus réducteur que le nickel, donc ne serait plus protégé s'il se trouvait en contact avec l'eau à cause d'une fissure dans le revêtement de nickel (oxydation préférentielle du fer par rapport au nickel).

Au contraire un dépôt de zinc, plus réducteur que le fer, permettrait d'assurer la protection du fer même en présence d'une fissure de manière analogue au principe de l'anode sacrificielle (dans le cas du zingage, on compte cependant sur la passivation efficace par les produits d'oxydation du zinc tant que la couche de zinc n'est pas détériorée).