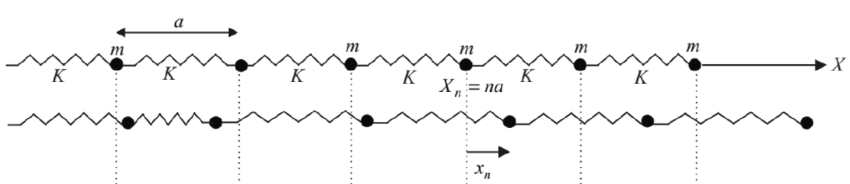
TD n°27 Absorption et dispersion

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Dispersion dans une chaîne infinie d'atomes⋆

On considère une chaîne infinie linéaire d'atomes ponctuels de masse m liés par des ressorts de raideur K. La chaîne est portée par l'axe OX ; à l'équilibre, les atomes occupent les positions $X = na$ avec $n \in \mathbb{Z}$ où a est la longueur à vide des ressorts.



1. Établir les équations différentielles régissant la position x_n de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre.
2. On cherche des solutions sous la forme $x_n = Ae^{i(\omega t - kX_n)}$, avec A une constante réelle. Déterminer la relation de dispersion.
3. Montrer que la chaîne se comporte comme un filtre passe-bas dont on calculera la pulsation de coupure ω_c. Tracer le graphe $\omega(k)$.
4. Que devient la relation de dispersion quand $\omega << \omega_c$? Commenter. Déterminer alors la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde.

2. Propagation d'ondes longitudinales dans un plasma⋆

On utilise le modèle du plasma peu dense et non relativiste mais on retire l'hypothèse localement neutre. On s'intéresse à la propagation d'ondes planes progressives harmoniques, de la forme $\vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ avec $\vec{k} = \underline{k}\vec{e}_x$.

1. Montrer que la non neutralité du plasma permet l'existence d'ondes longitudinales. Par la suite, on étudiera exclusivement ces ondes, on posera donc $\vec{E} = E_0\vec{e}_x$
2. Déterminer le champ magnétique d'une telle onde.
3. Déterminer deux relations entre $\vec{E}$ et $\vec{j}$ et en déduire l'équation vérifiée par $\vec{E}$.
4. Déterminer la relation de dispersion et commenter.
5. Calculer le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie électromagnétique. Commenter.

3. Ondes hertziennes dans l'eau de mer⋆

On étudie la propagation des ondes hertziennes dans l'eau de mer. On admet que l'eau est localement neutre ($\rho = 0$). Sa permittivité diélectrique relative $\varepsilon_r = 80$ et sa conductivité $\sigma = 6,23 \mathrm{S.m^{-1}}$ sont supposées réelles.

1. On admet que dans ce milieu, il suffit de remplacer ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$ dans les équations de Maxwell. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.
2. Établir la relation de dispersion.
3. Déterminer l'ordre de grandeur de la pulsation à laquelle l'absorption commence à être négligeable devant la propagation. Quelle est alors la vitesse de phase en absence d'absorption ?
4. On considère une onde de fréquence $f = 100$ MHz. Déterminer la valeur de la pulsation spatiale k. Déterminer la distance caractéristique d'absorption de l'onde et sa vitesse de phase. Y a-t-il dispersion ? Pourquoi n'utilise-t-on pas d'ondes hertziennes pour les communications sous-marines ?

4. Corde verticale•

Une corde vibrante verticale de masse linéique μ et de longueur $\ell \approx 10$m est suspendue par une de ses extrémités O, l'autre extrémité B étant libre. Au repos, O est fixe et la corde est verticale. Lorsqu'on impose à l'extrémité O un déplacement $x_O = a_m \cos(\omega t)$, on constate que la corde se déforme avec un déplacement $x(z,t)$ de pulsation ω dont l'amplitude augmente quand on s'éloigne de O. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme.

1. Établir l'expression de la tension $T(z)$ en tout point de la corde et montrer que :
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(z,t) = -g\frac{\partial x}{\partial z}(z,t) + g(\ell - z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z,t)$$
2. On se place "au début" de la corde, ce qui permet de remplacer $\ell - z$ par ℓ dans le coefficient variable de l'équation précédente. Établir la relation de dispersion et interpréter l'observation.

5. Ondes de surface

La relation de dispersion d'une onde à la surface d'une eau de profondeur h est donnée par :
$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\mu}k^3\right)\tanh(kh)$$
où g est l'accélération de la pesanteur, μ la masse volumique et γ la constante de tension superficielle de l'eau à l'interface eau-air.

1. Déterminer la dimension de γ.
2. Déterminer la distance caractéristique ℓ_c qui permet de comparer les effets de la tension superficielle et ceux de la pesanteur.
3. Comment se simplifie la relation de dispersion si la longueur d'onde est très inférieure à ℓ_c ? si la longueur d'onde est très supérieure à ℓ_c ? Donner dans chaque cas la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g dans un milieu de faible profondeur $\lambda >> h$ et de grande profondeur $\lambda << h$. Quand a-t-on dispersion ?
4. On donne $\gamma = 7,3 \times 10^{-2}$ UI. Calculer ℓ_c. Calculer v_φ et v_g pour une onde de marée ($\lambda = 1000$km et $h \approx$ quelques km), une houle de longueur d'onde 5m dans un océan profond, puis pour une onde dans une cuve à onde ($\lambda = 3$ cm et $h = 1$ mm).

6. Axones•

L'axone, ou fibre nerveuse, est le prolongement du neurone qui conduit les signaux électriques émis par le centre du neurone (potentiel d'action) vers les synapses. Les axones les plus simples sont formés d'une membrane lipidique enfermant un liquide physiologique riche en ions (l'axoplasme) et baignant dans un liquide cellulaire également riche en ions. Les propriétés conductrices de l'axone sont déterminées par :

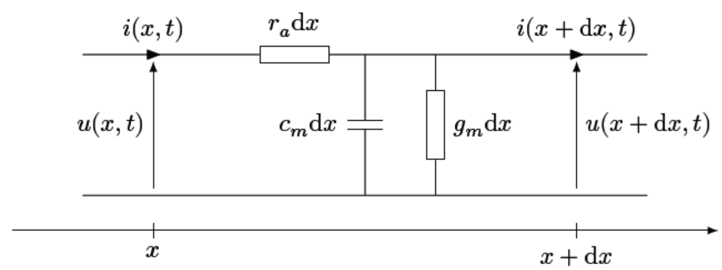


Figure 5 Schéma électrique élémentaire d'une fibre nerveuse

- la résistance linéique de l'axoplasme ($r_a = 6,4.10^9\Omega.\mathrm{m}^{-1}$) s'opposant au passage du courant le long de l'axone ;
- la conductance linéique de la membrane ($g_m = 63\mathrm{mS.m}^{-1}$) déterminant la fuite du courant ;
- la capacité de la membrane ($c_m = 0,32\mu\mathrm{F.m}^{-1}$) capable d'emmagasiner des charges électriques à l'intérieur et à l'extérieur de la membrane.

Chaque longueur élémentaire de longueur dx de la fibre nerveuse est modélisée par une cellule représentée sur la figure 5.

1. Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$ puis celle vérifiée par $u(x,t)$ seulement. On envisage dans la suite une solution sous forme d'onde plane progressive monochromatique $u(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$. Montrer que si ω est très inférieur à une pulsation ω_c que l'on exprimera en fonction de c_m et g'_m, l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ se simplifie en :
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{r_a c_m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$
On supposera cette condition vérifiée par la suite.

3. Quel est le phénomène décrit par cette équation ? Citer d'autres exemples analogues.
4. Déterminer la relation de dispersion entre ω et k. Montrer que le milieu est dispersif et absorbant. Que valent les vitesses de phase et de groupe ? Quelle relation lie ces deux grandeurs ?
5. Mettre en évidence une distance caractéristique d'atténuation. Comment dépend-elle de la fréquence ?

7. Guide d'onde rectangulaire•

On considère un guide d'onde métallique creux d'axe Oz, dont la section droite est le rectangle $0 < x < a$ et $0 < y < b$. L'intérieur du guide est rempli d'air assimilé au vide. On adopte pour les parois le modèle du conducteur parfait.

On se propose d'étudier la propagation suivant Oz dans ce guide d'une onde électromagnétique progressive monochromatique de pulsation ! dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E} = f(x,y)\cos(\omega t - k_g z)\vec{e}_x$ où $f(x,y)$ est une fonction réelle de x et y et k_g une constante positive.

On posera $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ (λ_g est la longueur d'onde guidée) et on notera $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$

1. Montrer que $f(x,y)$ ne dépend pas de x.
2. Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $f(y)$.
3. Expliciter la fonction $f(y)$. Montrer qu'il intervient un nombre entier n non nul (supposé positif). À chaque valeur de n correspond un mode de propagation. Décrire le type d'onde auquel on aboutit. Que laissent prévoir les conditions aux limites du champ électrique en $x = 0$ et $x = a$?
4. Écrire les composantes du champ magnétique. Commenter la structure des champs. Vérifier que le champ magnétique satisfait les conditions aux limites en $y = 0$ et $y = b$ Que se passe-t-il en $x = 0$ et $x = a$?
5. Exprimer k_g en fonction de ω, c, n et b. En déduire λ_g en fonction de λ_0, b et n. Montrer qu'il existe une fréquence de coupure f_c en dessous de laquelle il n'y a plus de propagation. A.N : f_c = 2, 5 GHz pour $n = 1$, calculer b.
6. Exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g de l'onde en fonction de c, n et du rapport f/f_c. A.N : calculer v_g et v_φ pour $f = 2f_c$ et $n = 1$.