Correction TD n°26

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Caractéristiques d'une OPPH

1. a est en m^{-1}.
2. On identifie la phase à $\omega t - \vec{k}.\vec{r}$, donc $\boxed{\vec{k} = a(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)}$.
3. On en déduit la longueur d'onde : $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{||\vec{k}||} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a} = 3,6.10^{-6}\mathrm{m}}$. On est dans la gamme des infrarouges. On en déduit $f = \frac{c}{\lambda} = 8,3.10^{13}$ Hz et $\omega = 2\pi f = 5,2.10^{14}$ rad.s^{-1}.
4. L'onde électromagnétique étant transverse, $\vec{k}.\vec{E} = 0 = (E_x + E_y)a$. Donc $\boxed{E_y = -E_x}$.
5. On a bien une onde plane progressive harmonique, donc on peut utiliser la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = -\frac{(E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y)}{c}$$

2. Source isotrope

1. On a simplement :

$$P_r = \oiint_S (r)\vec{\Pi}(r) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 \Pi(r)$$

2. En régime permanent et en absence de matière ($\vec{j} = \vec{0}$), le bilan local d'énergie électromagnétique donne $\boxed{\mathrm{div}\vec{\Pi} = 0}$. Le vecteur de Poynting est donc bien à flux conservatif. On en déduit que P_r ne dépend pas de r, c.à.d :

$$\boxed{\Pi(r) = \frac{\mathrm{cste}}{r^2}}$$

3. Elle serait divisée par 4.
4. On a $\Pi = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{\mathrm{cste}}{r^2} \Rightarrow \boxed{E(r) \propto \frac{1}{r}}$. Il s'agit d'une onde sphérique électromagnétique.

3. Cavité électromagnétique à une dimension

1. Comme dans le cours, on a :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(M,t) = c^2 \vec{\Delta}\vec{E}(M,t)$$

2. En remplaçant, on obtient :

$$f(x)\ddot{g}(t) = c^2 f''(x)g(t) \Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}$$

où la dernière expression est nécessairement égale à une constante, qu'on notera pour le moment α. On en déduit :

$$f''(x) - \alpha f(x) = 0 \quad \ddot{g}(t) - \alpha c^2 g(t) = 0$$

3. En $x = 0$ et $x = a$, il y a continuité de la composante tangentielle du champ électrique. Par ailleurs, le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait. On en déduit :

$$f(x = 0) = f(x = a) = 0$$

4. Il faut discriminer selon le signe de α.
   — Si $\alpha > 0$, alors les solutions pour f sont de la forme :
   $$f(x) = A\exp(\sqrt{\alpha}x) + B\exp(-\sqrt{\alpha}x)$$
   Cela est incompatible avec les conditions aux limites sauf si $A = B = 0$.
   — Si $\alpha = 0$, alors :
   $$f(x) = Ax + B$$
   Là encore, cela n'est pas compatible avec les CL.
   — Si $\alpha < 0$, alors on peut noter $\alpha = -k^2$, et l'équation différentielle devient :
   $$f''(x) + k^2 f(x) = 0$$
   Les solutions s'écrivent alors sous la forme :
   $$f(x) = A\cos(kx + \Psi)$$
   La condition en $x = 0$ impose $\Psi = \pm\frac{\pi}{2}$. La condition en $x = a$ impose $\boxed{k = \frac{\pi n}{a}}$ comme pour la corde de Melde accrochée à ses deux extrémités.
5. On obtient les modes propres de la cavité :
   $$\vec{E} = E_0 \sin\frac{\pi n}{a}\cos(\omega t + \varphi)\vec{u}_y$$

4. Bilan d'énergie électromagnétique

4.1 Conducteur ohmique⋆

1. En comprenant que le courant est distribué uniformément dans le conducteur, et en appliquant la loi d'Ohm locale, on a :
   $$\vec{E}(M) = \frac{\vec{j}(M)}{\gamma} = \frac{I}{\gamma\pi a^2}\vec{u}_z$$
2. L'étude des invariances et des symétries indique que :
   $$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$$
   L'application du théorème d'Ampère sur un cercle de rayon $r < a$ (on ne s'intéresse à l'expression de $\vec{B}$ qu'à l'intérieur du conducteur) donne :
   $$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2}\vec{u}_\theta$$
3. Le vecteur de Poynting vaut :
   $$\vec{\Pi}(M) = -\frac{I}{\pi\gamma a^2} \times \frac{Ir}{2\pi a^2}\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{\Pi}(M) = -\frac{I^2 r}{2\pi^2\gamma a^4}\vec{u}_r}$$
   On voit que la puissance rayonnée par le champ est dirigée radialement vers l'intérieur du cylindre !
4. $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 0$ car on est en régime permanent.
5. $P_{\text{rayonnée}}$ est égale au flux du vecteur de Poyting à travers la surface latérale du cylindre. D'où :
   $$P_{\text{rayonnée}} = \oiint_{r=a} \vec{\Pi}(M)\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \Pi(r=a)\times 2\pi a h = -\frac{I^2 h}{\pi\gamma a^2}$$
6. On utilise pour cela l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges :
   $$P_{\text{charges}} = \iiint_{\text{cylindre}} \vec{j}.\vec{E}\mathrm{d}V = \iiint_{\text{cylindre}} \frac{j^2(r)}{\gamma}\mathrm{d}V = \iiint_{\text{cylindre}} \frac{I^2}{\pi^2\gamma a^4}\mathrm{d}V = \frac{I^2}{\gamma\pi^2 a^4}\times\pi a^2 h$$
   $$\boxed{P_{\text{charges}} = \frac{I^2 h}{\pi\gamma a^2}}$$
   On reconnaît l'expression de la résistance électrique du cylindre $R = \frac{h}{\gamma S}$ et on retrouve $P_{\text{charges}} = RI^2$.
7. L'intégration de l'équation locale de (non-)conservation de l'énergie électromagnétique donne :
   $$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t) + P_{\text{rayonnée}} = -\boxed{P_{\text{charges}}}$$
   Cette équation est bien vérifiée ici : l'énergie interne du champ étant constante, la puissance rayonnée par le champ est intégralement absorbée par les charges et transformée en effet Joule.

4.2 Condensateur dans l'ARQS

1. Soit un point M quelconque à l'intérieur du condensateur. Le plan (M, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_z$) est un plan de symétrie des distributions de charge et de courant. Par conséquent, le champ magnétique est orthogonal à ce plan, donc dirigé selon $\vec{e}_\theta$. D'autre part du fait de l'invariance par rotation d'angle θ, $\vec{B}$ n'en dépend pas, d'où $\boxed{\vec{B}(M,t) = B(r,z,t)\vec{e}_\theta}$.

2. (a) Tout simplement car à l'intérieur du condensateur, $\vec{j}=\vec{0}$, donc la seule source de champ magnétique est liée à la variation temporelle de champ électrique.
   (b) A l'intérieur du condensateur, le théorème d'Ampère généralisé s'écrit, à l'aide du théorème de Stokes :

$$\oint \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}OM}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}$$

   Plaçons-nous sur un contour circulaire de rayon r, à la cote z à l'intérieur du condensateur. On obtient :

$$B(r)2\pi r=\mu_0\varepsilon_0 E\pi r^2=\mu_0\sigma(t)\pi r^2\Rightarrow \boxed{B(r)=\mu_0\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}(t)\frac{r}{2}}$$

3. (a) On aura, par définition :

$$\vec{\Pi}=\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\frac{r}{2}\vec{e}_r$$

   On remarque que l'énergie rayonnée se propage radialement, de l'extérieur vers l'intérieur du condensateur.
   (b) Calculons alors la puissance rayonnée à travers le cylindre dessiné par le condensateur :

$$\mathscr{P}=\iint\vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\frac{a}{2}2\pi ah=-\frac{q(t)}{C}\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{q^2(t)}{2C}\right)$$

   en introduisant $q(t)=\sigma(t)\pi a^2$ la charge contenue sur une armateur du condensateur et $C=\frac{\varepsilon_0\pi a^2}{h}$ la capacité du condensateur. Réécrivons l'équation :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{q^2(t)}{2C}\right)=-\mathscr{P}}$$

   Le condensateur échange donc de l'énergie avec l'extérieur par rayonnement.

4. (a) On a simplement $u_e(M,t)=\frac{\varepsilon_0E^2(t)}{2}$. Le champ étant uniforme entre les armatures, on a $\boxed{E_e=u_e\pi a^2h=\dfrac{q^2(t)}{2C}}$.
   (b) On a $u_m(M,t)=\frac{B^2(M,t)}{2\mu_0}$. Attention, le champ n'étant plus uniforme, il faut intégrer l'expression pour avoir l'énergie magnétique totale :

$$\frac{E_m=\iiint_V B^2(r,t)}{2\mu_0 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\frac{\mu_0 h}{16\pi}\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

5. Comparons les deux énergies :

$$\frac{E_m}{E_e}=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)^2q^2(t)\mu_0\varepsilon_0\pi a^2\approx\frac{1}{8}\omega^2\frac{a^2}{c^2}=\omega^2(\Delta t)^2$$

   où Δt est le temps de propagation de l'onde à l'intérieur de l'armature. Dans l'ARQS $\omega\Delta t<<1$ et on peut donc négliger l'énergie magnétique par rapport à l'énergie électrique.

6. Le sujet parle certainement de la puissance échangée par le champ EM avec les charges. Etant donné qu'il n'y a ni courant ni charges enter les armatures, cette puissance est nulle.

7. Je suppose que le bilan demandé correspond déjà à l'équation encadrée à la question 3 (b).

4.3 Solénoïde infini dans l'ARQS•

1. L'ARQS consiste à négliger le terme de courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère. Le régime statique est un cas particulier de l'ARQS où on néglige $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Faraday.

2. Les équations de Maxwell dans l'ARQS sont :

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec{E} & =\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \mathrm{div}\vec{B} & =0\\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} & =-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} & =\mu_0\vec{j}\end{cases}$$

3. Dans l'ARQS, le théorème d'Ampère reste valable. On aboutit alors au résultat classique (la démonstration peut être demandée !) :

$$\boxed{\vec{B}(M,t)=\mu_0 nI(t)\vec{u}_z}$$

4. Le champ $\vec{B}(t)$ dépendant du temps, le champ électrique est nécessairement non nul d'après l'équation de Maxwell-Faraday.

5. On procède par analogie avec l'étude des symétries pour le théorème d'Ampère :

Maxwell-Ampère	Maxwell-Faraday
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}=\mu_0\vec{j}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
Sym de $\vec{j}\Leftrightarrow$ Antisym de $\vec{B}$	Sym de $\vec{E}\Leftrightarrow$ Antisym de $-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
Antisym de $\vec{j}\Leftrightarrow$ Sym de $\vec{B}$	Antisym de $\vec{E}\Leftrightarrow$ Sym de $-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

6. Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, c'est donc un plan d'anti-symétrie pour $\vec{E}$. Par ailleurs, il y a invariance par translation suivant (Oz) et par rotation autour de (Oz). Donc :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_\theta$$

L'intégration de Maxwell-Faraday donne :

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\Gamma(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

où Γ est un contour fermé. En prenant un cercle de rayon r, on en déduit :

$$E(r)2\pi r = -\frac{\mathrm{d}(B(t)\pi r^2)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M,t) = -\frac{\mu_0 n r}{2}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t)\vec{u}_\theta}$$

7. Il vaut :

$$\boxed{\vec{\Pi}(M,t) = -\frac{\mu_0 n^2 r}{2} I(t)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t)\vec{u}_r}$$

8. On commence par exprimer la densité d'énergie électromagnétique dans le cylindre :

$$u(M,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}(M,t)^2 + \frac{\vec{B}(M,t)^2}{2\mu_0}$$

L'énergie totale contenue dans le solénoïde vaut :

$$U(t) = \iiint_{\text{cylindre}} u(M,t)\mathrm{d}V$$

Attention, le champ électrique dépendant de r, il faut bien penser à intégrer sur r lorsqu'on intègre la densité d'énergie électrique. On pourra utiliser le volume infinitésimal en cylindrique qui, comme tous les volumes infinitésimaux, est obtenu en multipliant entre elles les composantes du vecteur déplacement élémentaire : $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$. On en déduit :

$$U(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\mu_0^2 n^2}{4}\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)^2 \times 2\pi h \frac{R^4}{4} + \frac{\mu_0^2 n^2 I^2(t)}{2\mu_0} \times \pi R^2 h$$

Le premier terme représente l'énergie électrique totale contenue dans le cylindre. Le deuxième correspond à l'énergie magnétique.

9. Supposons que le courant parcourant le solénoïde est sinusoïdal de la forme $I(t) = I_m \cos(\omega t)$. Exprimons le rapport des deux énergies :

$$\frac{\langle \mathscr{E}_e \rangle}{\langle \mathscr{E}_m \rangle} = \frac{\varepsilon_0 \frac{\mu_0^2 n^2 \pi h R^4}{16} I_m^2 \omega^2}{\frac{\mu_0^2 n^2 I_m^2}{2\mu_0} \times \pi R^2 h} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{R^2}{8}\omega^2 = \frac{1}{8}\frac{R^2}{\omega^2 c^2} \approx \frac{R^2}{\lambda^2}$$

Dans l'ARQS, ce rapport est très inférieur à 1. On peut donc bien négliger l'énergie électrique. L'énergie totale s'écrit donc :

$$\boxed{U(t) = \frac{\mu_0^2 n^2 I^2(t)}{2\mu_0} \times \pi R^2 h}$$

10. Cette puissance est égale au flux du vecteur de Poynting rentrant dans le cylindre. C'est donc égale au flux de $\vec{\Pi}$ à travers la surface latérale du cylindre de rayon R :

$$P = \iint_{r=R} \vec{\Pi}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Pi(r=R) \times 2\pi R h = -\frac{2\pi \mu_0 n^2 R^2 h}{2} I(t)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t)$$

A noter qu'on a orienté le vecteur $\mathrm{d}\vec{S}$ vers l'extérieur du cylindre comme d'habitude. Donc si $P > 0$, de l'énergie est rayonnée vers l'extérieur, si $P < 0$, l'énergie est rayonnée vers l'intérieur.

11. Il n'y a pas de porteurs de charge dans le cylindre (l'intérieur du cylindre est vide).

12. Le bilan d'énergie sur le système macroscopique {champ électromagnétique dans le cylindre } donne :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + P = 0$$

Cela est bien vérifié ici.
Si l'énergie du champ croît , $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} > 0 \Rightarrow P < 0$ et $\vec{\Pi}$ est suivant $-\vec{u}_r$.
Si l'énergie du champ décroît, $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} < 0 \Rightarrow P > 0$ et $\vec{\Pi}$ est suivant $\vec{u}_r$.